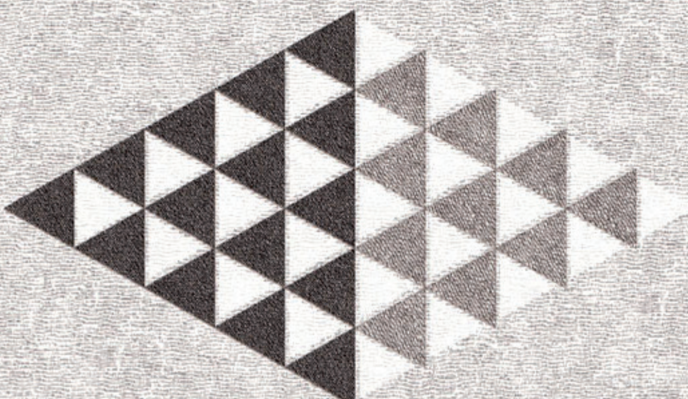
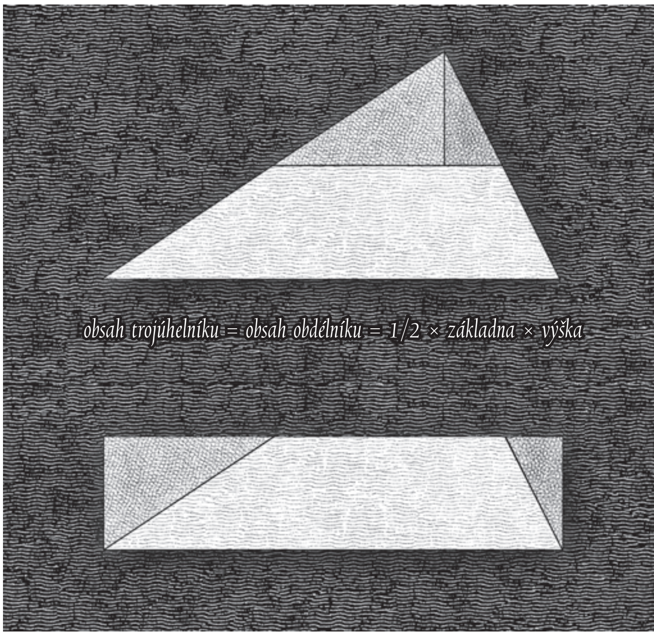
Q. E. D.

Krása matematického důkazu



Burkard Polster


obsah trojúhelníku = obsah obdélníku = 1/2 × základna × výška

Burkard Polster

Q. E. D.

Krása matematického důkazu

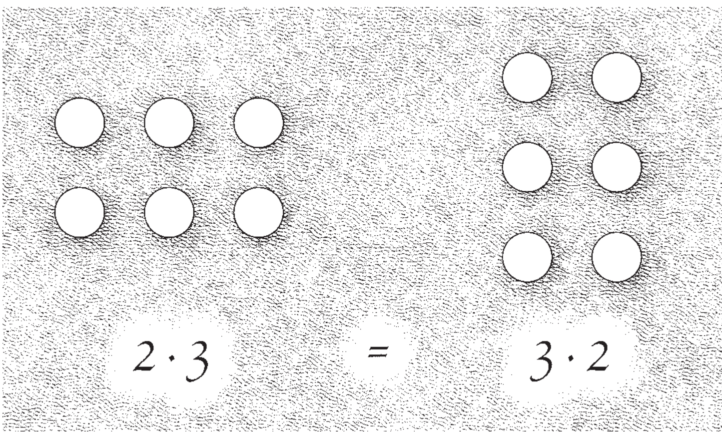
Designed and typeset by Wooden Books Ltd, Glastonbury, UK.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Q. E. D. Beauty in Mathematical Proof*
přeložil Luboš Pick.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Sazba a konverze do elektronické verze Tomáš Zeman.
Vydalo v roce 2014 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 734. publikaci (175. elektronická).

ISBN 978-80-7363-672-2

Q.E.D.

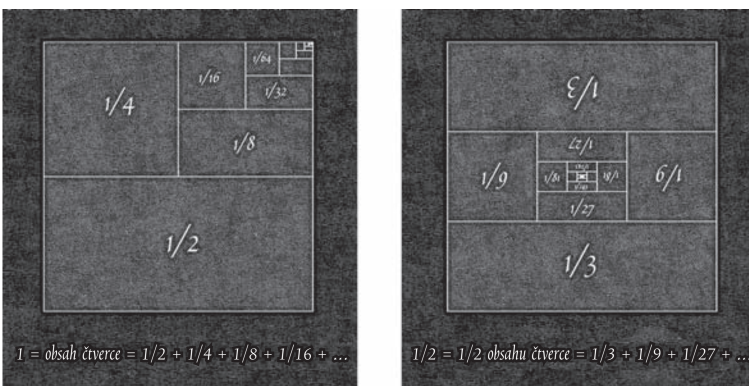
Krása matematického důkazu



Burkard Polster

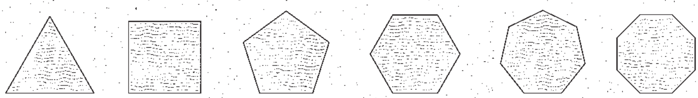
Věnováno s láskou Anu. Ta tomu všemu rozumí…

Cítím se zavázán mnoha matematikům z minulosti i přítomnosti, z jejichž nápadů a myšlenek jsem tuto knihu sestavil. Děkuji Mary Rossové a Johnu Stillwellovi za jejich kritiku a podnětné připomínky. Konečně děkuji z celého srdce také Johnu Martineauovi a Daudu Suttonovi, kteří mi byli trpělivými průvodci a pomocníky při otevírání onoho oka cyklónu, jež vede přímo do nádherného světa matematického důkazu.



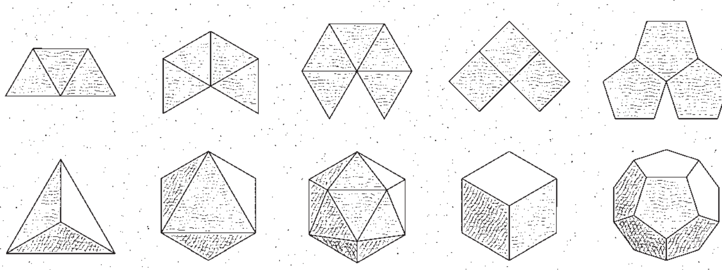
Dvě nekonečné řady na podnosu, připravené k podávání.

Obsah



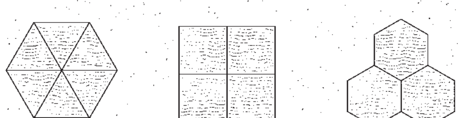
trojúhelník čtverec pětiúhelník šestiúhelník sedmiúhelník osmiúhelník

Pravidelný mnohoúhelník je konvexní dvojrozměrný útvar s identickými stranami a úhly. Existuje jich nekonečně mnoho.



čtyřstěn osmistěn dvanáctistěn krychle dvacetistěn

Pravidelný mnohostěn je konvexní trojrozměrné těleso, jehož všechny stěny jsou identické, mají tvar pravidelného mnohoúhelníku a u každého vrcholu se jich sejde stejný počet. Na obrázku nahoře vidíme různé způsoby, jak spojit tři nebo více pravidelných mnohoúhelníků v jednom bodě tak, aby nám ještě zbylo místo na jejich přehnutí do třetí dimenze. Dá se dokázat, že uvedené metody k sestrojení prostorových rohů jsou svého druhu unikátní, tedy jediné možné, a že vedou ke konstrukci proslulých pěti pravidelných těles.



Stejnou úvahou je možné ověřit, že existují jen tři možnosti, jak vydláždit beze zbytku celou rovinu pomocí stejných pravidelných mnohoúhelníků.

ÚVOD

Existuje několik matematických objektů, jejichž krásu je schopen vychutnat úplně každý. Jako příklad poslouží třeba pravidelné mnohoúhelníky nebo mnohostěny. Ty v dokonalosti předčí snad už jedině kruh nebo koule. A co taková Pythagorova věta, úhelný kámen pravoúhlého světa, kterým se záměrně obklopujeme? Nebo kuželosečky, které popisují dráhy nebeských těles?

Jen málo lidí ovšem ocení více než pár základních aspektů půvabu nádherného světa matematiky. Odhalení podstatné části této krásy je totiž obvykle dopřáno výhradně matematikům, a to ještě pouze při studiu či vymýšlení mistrně vysoustruhovaných důkazů, na které jen tak tak dosáhne pouze pár těch nejlépe trénovaných mozků světa.

Pokud chci já jakožto matematik veřejně prohlásit, že jsem ověřil pravdivost tvrzení nějaké věty, provedu to tak, že na konec jejího důkazu připíši tři písmena Q. E. D. To je zkratka latinského slovního obratu *quod erat demonstrandum* (do češtiny se dříve překládalo C. B. D. – „což bylo dokázati“, neboli „což mělo být dokázáno“). Takže Q. E. D. je na jedné straně milníkem pravdy a matematické krásy, na druhé straně ovšem zároveň reprezentuje zdánlivě nedosažitelnou stránku této pravěké vědy.

„Q. E. D.“ ale najdeme také na konci některých překvapivě úžasně jednoduchých a oku lahodících důkazů. Sbírkou několika takových zázračných klenotů, jakož i myšlenek v jejich pozadí Vás provede tato knížka, která byla napsána pro každého, koho zajímá krása matematiky ukrytá pod povrchem.

Melbourne, červenec 2003

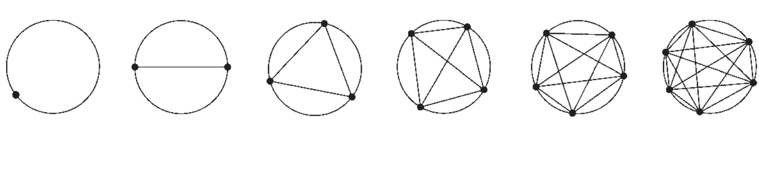
Proradná pravda

co je to vlastně důkaz

V matematice, podobně jako v přírodních vědách, můžeme udělat pokus nebo ověřit několik případů, a podle výsledku zformulovat určitou domněnku. V matematice však důkaz nelze nahradit žádným experimentem, ať už naše domněnka vypadá sebevíce přirozená a zjevná. Podívejme se třebas na to, na kolik oblastí lze nejvýše rozdělit kruh spojnicemi 1, 2, 3, 4, 5 a 6 bodů na jeho obvodu (*dole*). Překvapivě to je 1, 2, 4, 8, 16 a… 31, nikoli 32 (!), jak by se dalo čekat.

Nebo se podívejme třeba na proslulou Goldbachovu domněnku. Ta tvrdí, že každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel, jako například 12 = 5 + 7 nebo 30 = 23 + 7. Tvrzení domněnky bylo sice ověřeno pro mnoho milionů případů, avšak dokud nebude nalezen důkaz, nemůžeme si nikdy být zcela jisti, že ji třeba hned ten příští případ, který někdo zkusí prověřit, nevyvrátí.

Důkaz matematického tvrzení by měl být co nejsrozumitelnější, co nejelegantnější, a hlavně co nejnázornější. Podívejme se (*naproti nahoře*) na důkaz tvrzení, že se číslo 0,9999… (jehož nekonečný desetinný rozvoj je složen ze samých devítek) rovná číslu 1. Ten uvedené požadavky nepochybně splňuje. Jeho hlavní myšlenku lze navíc velmi snadno upravit k přeměně mnoha čísel s obávanými periodickými rozvoji do podstatně příjemnějších tvarů. Důkaz tvrzení, že šachovnici zbavenou dvou protilehlých rohových políček není možné pokrýt dominovými kostkami (*naproti dole*), je dalším takovým příkladem. A i tento důkaz lze samozřejmě použít pro mnoho dalších typů zmrzačených šachovnic.



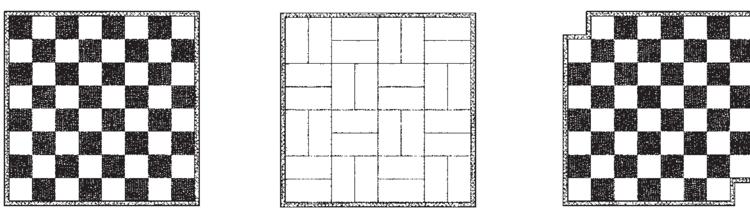
Věta: $1 = 0{,}999\ldots$

Důkaz: Nechť $x = 0{,}999\ldots$. Potom

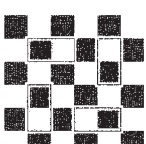
$$\begin{array}{r} 10\,x = 9{,}999\ldots \\ -\,x = 0{,}999\ldots \\ \hline =9\,x = 9{,}000\ldots \end{array}$$

Tedy $x = 1{,}000\ldots$

Q. E. D.



Je snadné pokrýt obyčejnou šachovnici dominovými kostkami. Šachovnici zbavenou dvou protilehlých rohových políček jimi však pokrýt nelze.



Důkaz: Při jakémkoli dláždění pokryje jedna dominová kostka vždy jedno černé a jedno bílé políčko. Pokaždé tedy pokryjeme stejný počet bílých a černých políček. Na naší upravené šachovnici je ale bílých políček o dvě méně než černých a proto ji dominovými kostkami nelze pokrýt. Q. E. D.