Řešené příklady z matematiky

Lineární algebra

Jaroslava Justová

e-kniha

MATIK

Řešené příklady z matematiky

LINEÁRNÍ ALGEBRA

RNDr. Jaroslava Justová

Matik Liberec

E-knihu vydal:
Matik Liberec
Vydání první, 2015

ISBN 978-80-87711-06-4

Úvodem

Tato učebnice je věnována důležité oblasti matematiky, lineární algebře. Je určena především vysokoškolským studentům prvních ročníků nematematických oborů, ale může být vhodnou pomůckou i pro studenty přírodovědných gymnázií a další zájemce o matematiku. Je zaměřena na srozumitelné vysvětlení postupů při řešení různých typů úloh a je vhodná nejen pro studenty denního, ale i kombinovaného studia.

Probírané učivo je rozděleno do devíti kapitol. V každé naleznete nejprve stručný přehled základních poznatků z teorie, následovaný řešenými příklady s podrobným komentářem a vysvětlením postupu výpočtu. Metodické zpracování odpovídá tomu, že lineární algebra je často náplní již 1. semestru, proto se zde nevyskytují úlohy, které by vyžadovaly větší znalosti z matematické analýzy. Zájemce o podrobnější výklad teorie s důkazy vět a náročnější příklady bych odkázala např. na literaturu [1], [2]. Mou snahou bylo zahrnout do učebnice všechna základní témata lineární algebry probíraná na nematematických oborech vysokých škol a poskytnout studentům rozsáhlý soubor řešených úloh vhodných pro přípravu na semináře a písemné testy.

Text vznikl na základě mých dlouholetých zkušeností s vyučováním matematiky na Technické univerzitě v Liberci, na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické. Praktická forma e-knihy umožňuje mít ji stále při ruce – ve čtečce, na počítači, v tabletu či v mobilu.

Věřím, že tato učebnice přispěje k lepšímu porozumění probírané látky a ke snazšímu zvládnutí Vašeho studia.

autorka

P.S. Vřele doporučuji si uvedené příklady nejen přečíst, ale také si je vypočítat, s průběžnou či závěrečnou kontrolou výsledku i postupu řešení.

Obsah

1. Aritmetické vektory

Definice 1.1. *Aritmetickým n-rozměrným vektorem nazveme uspořádanou n-tici reálných čísel.*

Vektory značíme: $u = (u_1, u_2, ..., u_n),\ u_i \in R\ \forall\, i = 1, ..., n,$
$o = (0, 0, ..., 0)$ ... nulový vektor.

Základní operace s aritmetickými vektory

Mějme vektory $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ a číslo $c \in R$. Zavedeme:

- Součet vektorů u a v: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.
- Reálný násobek vektoru u číslem c: $cu = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$.

Definice 1.2. *Mějme n-rozměrné aritmetické vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Lineární kombinací těchto vektorů nazveme vektor z, pro který platí:*

$$z = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k = \sum_{i=1}^{k} c_iu_i, \quad c_i \in R.$$

Reálná čísla c_i z definice se nazývají *koeficienty lineární kombinace*. Jsou-li všechny koeficienty nulové, pak se lineární kombinace nazývá *triviální* a jejím výsledkem je nulový vektor.

Lineární závislost a nezávislost vektorů

Lineární závislost a nezávislost je důležitou vlastností skupiny vektorů.

Definice 1.3. *Aritmetické vektory $u_1, u_2, ..., u_k$ se nazývají lineárně závislé, jestliže existují čísla $c_1, c_2, ..., c_k \in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, a přitom*

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k = o.$$

V opačném případě se vektory nazývají lineárně nezávislé.

Věta 1.1. *Vektory jsou lineárně závislé, právě když lze aspoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.*

Z této věty plyne, že lineárně závislé jsou skupiny vektorů, kde jeden je násobkem jiného, jeden je součtem jiných, kde je obsažen nulový vektor apod. Z následující věty vyplývá, že závislé jsou vektory také tehdy, když je jejich počet větší, než kolik mají složek.

Věta 1.2. *Je-li k n-rozměrných vektorů a $k > n$, pak jsou vektory lineárně závislé.*

Obecně se lineární (ne)závislost zjišťuje:
a) řešením rovnice z definice – rovnice pro vektory se rozepíše podle jednotlivých složek a ze vzniklé soustavy rovnic se vypočítají čísla c_i. Pak platí, že vektory $u_1, u_2, ..., u_k$ jsou

- lineárně závislé, jestliže $\exists c_i \neq 0$, že $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i = 0$,
- lineárně nezávislé, jestliže $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i u_i = 0 \ \Rightarrow c_i = 0 \ \forall i = 1, ..., k.$

b) výhodněji pomocí hodnosti matice (viz kapitola *Matice*).

Přidáme-li do skupiny lineárně závislých vektorů další vektor, bude nová skupina lineárně závislá. Odebereme-li ze skupiny lineárně nezávislých vektorů některý vektor, zůstane skupina lineárně nezávislá.

Poznámka

Dvojrozměrné vektory můžeme graficky znázornit v rovině orientovanou úsečkou z bodu $[0, 0]$. Dva lineárně závislé vektory jsou rovnoběžné, dva lineárně nezávislé vektory různoběžné. Analogicky lze znázornit trojrozměrné vektory v prostoru.

Skalární součin a norma aritmetických vektorů

Pro aritmetické vektory $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ zavádíme kromě základních operací sčítání a násobení reálným číslem i další operaci, a to *skalární součin vektorů* u *a* v s označením uv:

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i.$$

Dva aritmetické vektory u, v se nazývají *ortogonální*, jestliže $uv = 0$. Navzájem ortogonální nenulové vektory jsou lineárně nezávislé.

<u>Vlastnosti skalárního součinu</u> (u, v, z jsou aritmetické vektory):

- $uu \geq 0 \;\wedge\; (uu = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
- $uv = vu$,
- $(u + v)z = uz + vz$,
- $c(uv) = (cu)v,\; c \in R$.

Pomocí skalárního součinu zavedeme i další důležitý pojem, a to *norma vektoru* u, kterou značíme $||u||$:

$$||u|| = \sqrt{uu}.$$

<u>Vlastnosti normy</u> (u, v jsou aritmetické vektory):

- $||uu|| \geq 0 \;\wedge\; (||u|| = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
- $||cu|| = |c|\,||u||,\; c \in R$,
- $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Takto zavedená norma se nazývá eukleidovská. Normu aritmetického vektoru lze zavést i jinými způsoby (viz Příklad 1.16).

<u>*Poznámky*</u>

1) Při grafickém znázornění dvojrozměrných a trojrozměrných vektorů vyjadřuje norma vektoru jejich délku. Nenulové ortogonální vektory jsou na sebe kolmé.

2) Pro odchylku $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ dvou nenulových vektorů platí vztah:

$$\cos\varphi = \frac{uv}{||u||\,||v||}.$$

3) Je-li $||u|| = 1$, vektor u se nazývá *normovaný*. Z libovolného vektoru u můžeme vytvořit normovaný vektor tak, že ho vydělíme jeho normou (tj. $u_0 = \frac{u}{||u||}$).

Řešené příklady

Příklad 1.1.

Jsou dány vektory $u_1 = (2, -3, 0)$, $u_2 = (2, 1, 6)$, $u_3 = (-1, 1, -1)$. Utvořte jejich lineární kombinace:
a) $t = 7u_2$,
b) $v = 4u_1 + 5u_3$,
c) $w = 2u_1 - 2u_2 + u_3$.

Postup: Výpočet provedeme po složkách:

a) $t = 7(2, 1, 6) = (14, 7, 42)$,
b) $v = 4(2, -3, 0) + 5(-1, 1, -1) = (3, -7, -5)$,
c) $w = 2(2, -3, 0) - 2(2, 1, 6) + (-1, 1, -1) = (-1, -7, -13)$.

Příklad 1.2.

Jsou dány vektory $t = (2, 4, -5), u = (3, 1, -2), v = (3, 6, -1, 1)$. Z následujících zápisů vyberte ty, které označují nějakou lineární kombinaci těchto vektorů:

$2t$, $3t - 8u$, $2u + 4$, $-3v$, tu, $2u + 6v$, $(0, 0, 0)$.

Postup: Lineární kombinace vektorů představují zápisy:

$2t$, $3t - 8u$, $-3v$, $(0, 0, 0)$.

Lineárními kombinacemi nejsou:

$2u + 4$ ... nelze k vektoru přičítat číslo,
tu ... lineární kombinací není skalární součin vektorů,
$2u + 6v$ ... nelze sčítat vektory s různým počtem složek.

Příklad 1.3.

Zjistěte, zda vektor $z = (1, 4, 0)$ je lineární kombinací vektorů u, v, kde $u = (-2, 1, 3)$ a $v = (1, -2, -2)$.

Postup: Podle definice lineární kombinace musíme zjistit, zda existují čísla c_1, c_2, aby:

$$z = c_1 u + c_2 v,$$

$$(1, 4, 0) = c_1(-2, 1, 3) + c_2(1, -2, -2).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= \; -2c_1 \; + c_2, \\ 4 &= \; c_1 \; - 2c_2, \\ 0 &= \; 3c_1 \; - 2c_2. \end{aligned}$$

Dosazovací nebo sčítací metodou získáme řešení $c_1 = -2, c_2 = -3$.
Vektor z je lineární kombinací zadaných vektorů: $z = -2u - 3v$.

Příklad 1.4.

Podle definice zjistěte, zda vektory $(1, -1, 0, 2)$, $(2, 0, 2, 3)$, $(2, -4, 2, 1)$ jsou lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

Postup: Z vektorů sestavíme lineární kombinaci s koeficienty c_1, c_2, c_3 a řešíme rovnici:

$$c_1(1, -1, 0, 2) + c_2(2, 0, 2, 3) + c_3(2, -4, 2, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rrrl} c_1 & +2c_2 & +2c_3 & = 0, \\ -c_1 & & -4c_3 & = 0, \\ & 2c_2 & +2c_3 & = 0, \\ 2c_1 & +3c_2 & +c_3 & = 0. \end{array}$$

Dosazovací nebo sčítací metodou získáme jediné řešení $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, proto jsou vektory lineárně nezávislé.

Příklad 1.5.

Podle definice spočítejte, zda vektory $(-2, 1, 2)$, $(0, 1, 5)$, $(2, 0, 3)$ jsou lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

Postup: Pro lineární kombinaci vektorů s koeficienty c_1, c_2, c_3 budeme řešit rovnici:

$$c_1(-2, 1, 2) + c_2(0, 1, 5) + c_3(2, 0, 3) = (0, 0, 0).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rrrl}
-2c_1 & & +2c_3 & = 0, \\
c_1 & +c_2 & & = 0, \\
2c_1 & +5c_2 & +3c_3 & = 0, \\
\hline
& & c_3 & = c_1, \\
& & c_2 & = -c_1, \\
2c_1 & -5c_1 & +3c_1 & = 0, \\
\hline
& & 0 & = 0.
\end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, tedy i řešení nenulové. Proto jsou zadané vektory lineárně závislé.

Příklad 1.6.

Zjistěte, pro které a jsou vektory $(4, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(1, a, 5)$ lineárně závislé.

Postup: Sestavíme lineární kombinaci s koeficienty c_1, c_2, c_3 a hledáme nenulové řešení rovnice:

$$c_1(4, -1, 2) + c_2(1, 2, -1) + c_3(1, a, 5) = (0, 0, 0).$$

Dostaneme soustavu:

$$
\begin{array}{rrrl}
4c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0, \\
-c_1 & +2c_2 & +ac_3 & = 0, \\
2c_1 & -c_2 & +5c_3 & = 0, \\
\hline
 & & c_2 & = -4c_1 - c_3, \\
 & & c_1 & = -c_3 \ \Rightarrow \ c_2 = 3c_3, \\
c_3 & +6c_3 & +ac_3 & = 0, \\
\hline
 & c_3 & (a+7) & = 0.
\end{array}
$$

Z 1. a 3. rovnice jsme vyjádřili c_2 a c_1 a dosadili je do 2. rovnice. Poslední rovnice má dvě řešení:
a) $c_3 = 0$, pak ale i $c_1 = 0, c_2 = 0$ a vektory by byly lineárně nezávislé pro každé a,
b) $a = -7$ a pak může být c_3 libovolné nenulové číslo. Tedy pro hodnotu $a = -7$ jsou vektory lineárně závislé.

Příklad 1.7.

Mějme lineárně nezávislé vektory $u, v, w \in V_n$. Zjistěte, zda jsou vektory $(u - v)$, $(u + w)$, $(u + v - 2w)$ lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

Postup: Sestavíme opět lineární kombinaci s koeficienty c_1, c_2, c_3 a řešíme rovnici:

$$c_1(u - v) + c_2(u + w) + c_3(u + v - 2w) = o,$$

$$(c_1 + c_2 + c_3)u + (c_3 - c_1)v + (c_2 - 2c_3)w = o.$$

Protože vektory $u, v, w \in V_n$ jsou lineárně nezávislé, musí platit:

$$
\begin{array}{rrrl}
c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0, \\
-c_1 & & +c_3 & = 0, \\
 & c_2 & -2c_3 & = 0.
\end{array}
$$

Soustava má jediné řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$, proto jsou vektory $(u - v)$, $(u + w)$, $(u + v - 2w)$ také lineárně nezávislé.

Poznámka

Lineární závislost a nezávislost vektorů se výhodněji zjišťuje pomocí hodnosti matice (viz kapitola *Matice*).