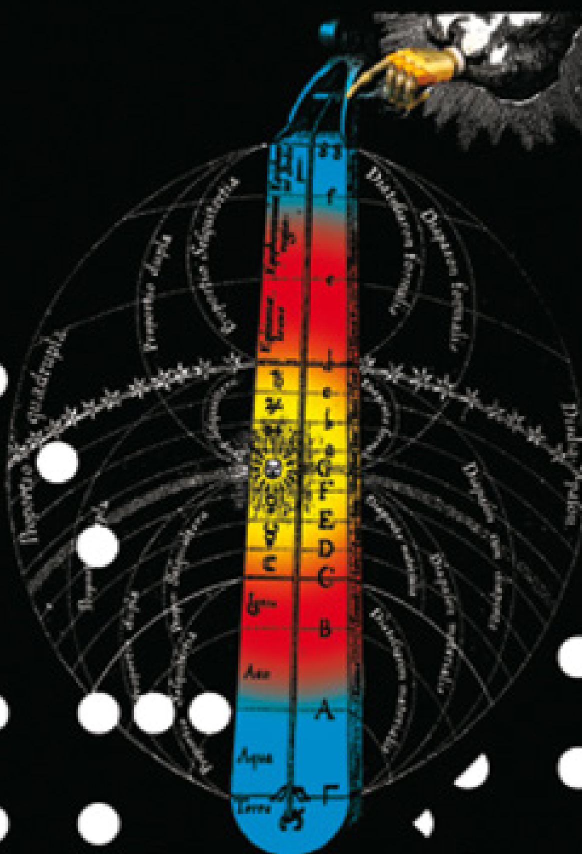
Mario Livio

JE BŮH MATEMATIK?



argo / dokořán

Mario Livio

JE BŮH MATEMATIK?

ARGO / DOKOŘÁN

Mario Livio
JE BŮH MATEMATIK?

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Is God a Mathematician?* vydaného nakladatelstvím Simon & Schuster v New Yorku 2009 přeložil Petr Holčák.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Pavel Houser.
Jazyková korektura Tereza Ješátková.
Obálka Pavel Růt. Grafická úprava Vladimír Fára, sazba Miloš Jirsa.
Konverze do elektronické verze Michal Puhač.
Vydalo v roce 2018 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 960. publikaci (290. elektronická).

ISBN 978-80-7363-898-6

Sofii

OBSAH

ÚVODEM

Jestliže se pracovně zabýváte kosmologií, volně řečeno studiem vesmíru jako celku, bývá běžnou součástí vašeho života každotýdenní dávka dopisů, e-mailů nebo faxů od lidí (bez výjimky mužů), kteří potřebují, abyste se seznámili s jejich vlastními teoriemi vesmíru. Největší chybou, kterou můžete udělat, je zdvořile odpovědět, že byste si přáli dozvědět se o věci víc. Okamžitě totiž následuje nekonečná kanonáda přípisů a vzkazů. Jak se dá takovému útoku zabránit? Taktika, o jejíž účinnosti jsem se přesvědčil (nebudeme-li počítat nezdvořilé ponechání dopisu bez odpovědi), je upozornit pisatele, že pokud není příslušná teorie formulována precizním jazykem matematiky, pak její platnost nelze dost dobře zhodnotit. Taková odpověď zastaví v rozletu většinu amatérských kosmologů. Realita je taková, že bez matematiky by moderní kosmologie nedokázala ve snaze o pochopení přírodních zákonů postoupit ani o píď. Matematika dodává pevnou konstrukci, která drží pohromadě jakoukoli teorii vesmíru. Možná to nebude znít až tak překvapivě, to ale jen dokud si neuvědomíme, že ani povaha matematiky samé není úplně jasná. Jak to jednou vyjádřil britský filozof Michael Dummett: „Dvě nejabstraktnější intelektuální disciplíny, filozofie a matematika, působí v hlavách tentýž zmatek a vyvolávají tutéž otázku: *o čem* vlastně jsou? Tento zmatek neplyne pouze z nevědomosti: dokonce i pro ty, kdo v oněch oborech pracují, může být odpověď na tuto otázku obtížná.“

V následující knize se budu pokorně pokoušet o vyjasnění některých stránek podstaty matematiky a zejména povahy vztahu mezi matematikou a pozorovaným světem. Mým záměrem určitě není předkládat úplné dějiny matematiky. Chci spíše chronologicky sledovat vývoj některých pojetí, která mají přímý dopad na to, jak chápeme roli matematiky v našem poznávání vesmíru.

K myšlenkám obsaženým v této knize přímo i nepřímo dlouhodobě přispívala celá řada lidí. Rád bych za užitečné výměny názorů poděkoval Michaelu Atiyahovi, Gia Dvalimu, Freemanu Dysonovi, Hillelu Gauchmanovi, Davidu

Grossovi, Rogeru Penroseovi, Martinu Reesovi, Ramanu Sundrumovi, Maxi Tegmarkovi, Stevenu Weinbergovi a Stephenu Wolframovi. Jsem zavázán Dorothy Morgensternové Thomasové za to, že mi umožnila využít kompletního textu, v němž Oscar Morgenstern popsal zážitek Kurta Gödela s americkým Úřadem pro přistěhovalectví. William Christens-Barry, Keith Knox, Roger Easton a především Will Noel byli tak laskavi a podrobně mi vysvětlili, co zjistili, když se snažili dešifrovat Archimedův palimpsest. Zvláštní dík patří Lauře Garbolinové, která mi zajistila zásadní a vzácné materiály k dějinám matematiky. Rovněž děkuji oddělením zvláštních sbírek Univerzity Johna Hopkinse, Chicagské univerzity a Francouzské národní knihovny v Paříži za vyhledání některých vzácných rukopisů.

Stefanu Casertanovi vděčím za podporu u obtížných překladů z latiny; Elizabeth Fraserové a Jill Lagerstromové za jejich neocenitelnou pomoc (vždy s úsměvem) s bibliografií a jazykovými problémy.

Zvláštní dík patří Sharon Toolanové za její profesionální pomoc s přípravou rukopisu k tisku a Ann Feildové, Kristě Wildtové a Stacey Bennové za nákres některých obrázků.

Každý autor by měl považovat za své štěstí, jestliže se mu bude dostávat od jeho drahé polovičky tak nepřetržité podpory kombinované s trpělivostí, jakou mi při dlouhém psaní knihy poskytovala má žena Sofie.

Nakonec bych rád poděkoval své agentce Susan Rabinerové, bez jejíhož povzbuzování by tato kniha nikdy nevznikla. Jsem vděčen také redaktorovi Bobu Benderovi za pečlivé pročítání rukopisu a bystré poznámky; Johanně Liové za neocenitelnou podporu při produkci knihy, Lorettě Dennerové a Amy Ryanové za redigování textu, Victorii Meyerové a Katie Grinchové za propagaci a celému výrobnímu a marketingovému týmu nakladatelství Simon & Schuster za veškerou jejich usilovnou práci.

KAPITOLA PRVNÍ

ZÁHADA

Před pár lety jsem měl přednášku na Cornellově univerzitě. Na jedné ze stránek mé prezentace v PowerPointu stálo: „Je Bůh matematik?" Jakmile se tahle stránka objevila, slyšel jsem, jak jeden student v přední řadě zalapal po dechu: „Proboha, doufám, že ne!"

Svou řečnickou otázkou jsem nezamýšlel podniknout filozofický pokus o definování Boha, ani v tom nebyl zlomyslný záměr vyděsit v auditoriu ty, kdo mají z matematiky hrůzu. Pouze jsem poukázal na záhadu, s níž po staletí zápasily některé z nejoriginálnějších mozků na světě – na zjevnou všudypřítomnost a všemohoucnost matematiky. To jsou totiž vlastnosti, které se obvykle pojí pouze s božstvím. Britský fyzik James Jeans (1877–1946) jednou prohlásil: „Vesmír vypadá, jako by byl navržen čistým matematikem."[1] Matematika se zdá být až příliš dobrá nejen v popisu a vysvětlování celého kosmu, ale i některých vysoce chaotických lidských aktivit.

Ať se fyzikové snaží formulovat teorie vesmíru, akcioví analytici si lámou hlavu s předpověďmi příštího krachu na trhu, neurobiologové sestavují modely mozkových funkcí nebo se vojenští zpravodajští statistici pokoušejí optimalizovat alokaci zdrojů, všichni používají matematiku. A navíc, i když všichni aplikují formální systémy vyvinuté různými matematickými obory, vždy mají na mysli tutéž globální a stejnorodou matematiku. Čím to vlastně je, že matematika vládne tak ohromnými schopnostmi? Či řečeno s Einsteinem: „Jak je možné, že matematika, produkt lidského myšlení *nezávislý na zkušenosti* [zvýraznil autor], tak skvěle odpovídá objektům fyzikální reality?"[2]

Onen pocit naprosté nevysvětlitelnosti není žádnou novodobou záležitostí. Již někteří filozofové starověkého Řecka, zejména Pythagoras a Platón, stáli v úžasu nad tím, jakou má matematika moc formovat a řídit vesmír a zároveň, jak se jim alespoň zdálo, se vymyká možnostem lidí ji měnit, usměrňovat nebo ovlivňovat. Svůj obdiv k matematice nedokázal skrýt ani anglický politický filozof Thomas Hobbes (1588–1679). V díle *Leviathan*, působivém výkladu principů fungování společnosti a vlády, Hobbes prohlásil geometrii za vzor racionální argumentace:

> Vidíme-li tedy, že pravda záleží ve správném uspořádání slov našeho výroku, musíme mít při hledání přesné pravdy nutně na paměti, co každé užívané slovo znamená, a podle toho je také správně klást na místo. Jinak shledáme, že jsme se zapletli do slov, jako se pták chytne na větvičku namazanou lepem a čím usilovněji se snaží vyplést, tím více se lepí. A proto v geometrii, vědě snad jediné, která se Bohu tak zalíbila, že ji ráčil dát lidem, začíná se tím, že se přesně vymezuje význam jejích slov. Oni tomu vymezování říkají definice a kladou je na začátek svého počítání.[3]

Tisíciletí impozantního matematického bádání a učených filozofických spekulací na záhadu úžasné moci matematiky příliš mnoho světla nevrhla. Celé mysterium se dokonce v určitém smyslu spíše prohloubilo. Známý matematický fyzik z Oxfordu Roger Penrose zde už například spatřuje ne jednu, ale hned trojí záhadu. Penrose rozeznává tři různé „světy“: *svět našeho vědomého vnímání, fyzický svět a platónský svět matematických forem.*[4] V prvním světě se odehrávají všechny naše mentální vjemy a představy – vnímáme zde tváře našich dětí, kocháme se úžasnými západy slunce nebo reagujeme na hrůzné obrazy válek. Je to také svět, v němž se vyskytuje láska, žárlivost i předsudky, stejně jako vnímání hudby, vůně jídel nebo strach. Druhý svět je ten, o němž běžně mluvíme jako o hmotné realitě. Přebývají v něm skutečné květiny, tabletky aspirinu, bílá oblaka nebo letadla, ale také galaxie, planety, atomy, srdce paviánů a mozky lidí. Platónský svět matematických forem, podle Penrose svět zcela skutečný stejně jako svět fyzický a mentální, je vlastí matematiky. Nacházejí se v něm přirozená čísla 1, 2, 3, 4, ..., všechny tvary, postuláty a věty eukleidovské geometrie, Newtonovy zákony pohybu, teorie strun, teorie katastrof nebo matematické modely chování akciového trhu. A nyní, říká Penrose, docházíme k oněm třem záhadám. Zaprvé, svět hmotné reality se podle všeho řídí zákony, které ve skutečnosti sídlí ve světě matematických forem. Právě to je hádanka, která Einsteina tak mátla. Stejně zmatený tím byl i držitel Nobelovy ceny za fyziku Eugene Wigner (1902–1995):[5]

> Zázrak toho, jak se jazyk matematiky přesně hodí k formulaci fyzikálních zákonů, je úžasný dar, který nechápeme ani si jej nezasluhujeme. Měli bychom za něj být vděčni a doufat, že přetrvá i ve světle budoucího výzku-

mu a že, k naší radosti, i když možná i k našemu údivu, zahrne široké oblasti vědění.

Druhou záhadou je, že samým vnímajícím myslím, v nichž sídlí naše vědomé vnímání, se nějak podařilo vzniknout z fyzického světa. Jak vlastně se *mysl* zrodila z *hmoty*? Budeme někdy schopni zformulovat teorii fungování vědomí, která by byla stejně soudržná a přesvědčivá, jako je nyní řekněme teorie elektromagnetismu? Kruh je nyní záhadně uzavřen. Vnímající mysli nějakým zázrakem získaly přístup k matematickému světu tím, že objevily, nebo vytvořily a zformulovaly celou pokladnici abstraktních matematických forem a konceptů.

Penrose pro žádné z těchto tří tajemství vysvětlení nenabízí a pouze lakonicky uzavírá: „Není pochyb, že ve skutečnosti neexistují tři světy, ale jen *jeden*, jehož pravou povahu ovšem v současnosti nedokážeme ani zahlédnout." To je mnohem pokornější přiznání než odpověď školního ředitele ve hře *Forty Years On* (Čtyřicet let poté) od anglického dramatika Alana Bennetta na otázku v zásadě obdobnou:

Foster: Ohledně Svaté Trojice mám stále trochu nejasno, pane.

Ředitel: Tři v jednom, jeden ve třech, naprosto jasné. Máte-li s tím nějaké problémy, obraťte se na učitele matematiky.

Celá hádanka je však ještě zamotanější, než jak jsem ji teď nastínil.

Úspěch matematiky ve vysvětlování světa kolem nás, který Wigner nazval „nepochopitelnou účinností matematiky", má vlastně dvě stránky, jednu překvapivější než druhou. Předně zde funguje aspekt, který by se dal označit termínem „aktivní". Když fyzikové bloudí labyrintem přírody, svítí si na cestu matematikou – nástroje, které používají a rozvíjejí, modely, jež tvoří, a vysvětlení, která vyvozují, to všechno je svou povahou matematické. To už samo o sobě vypadá na první pohled jako zázrak. Newton pozoroval padající jablko, Měsíc a příliv s odlivem na plážích, nikoli matematické rovnice. Ze všech těchto přírodních jevů však nějakým způsobem dokázal vytěžit jasné, zhuštěně podané a neuvěřitelně přesné matematické zákony přírody. Když skotský fyzik James Clerk Maxwell (1831–1879) rozšířil rámec klasické fyziky tak, aby zahrnovala všechny elektrické a magnetické jevy známé v 60. letech 19. století, uskutečnil to pomocí pouhé čtveřice matematických rovnic. Chvíli se nad tím zamysleme. Výklad celého souboru výsledků experimentů s elektromagnetismem a světlem, jejichž popisy v té době zabíraly celé svazky, se zhustil do čtyř krátkých rovnic. Ještě větší ohromení budí Einsteinova obecná teorie relativity – je to dokonalý příklad mimořádně přesné a vnitřně bezesporné matematické teorie něčeho tak fundamentálního, jako je struktura prostoru a času.

Záhadná efektivnost matematiky má však také svou „pasivní" stránku a ta je tak překvapivá, že vedle ní význam „aktivního" aspektu bledne. Koncepty a vztahy, které matematici zkoumají pouze z touhy po čistém poznání – zcela bez záměru je jakkoli využít – se o desítky let později vynořují jako nečekaná řešení problémů zakotvených ve hmotné skutečnosti! Jak je to možné? Vezměme si za příklad docela zábavný případ excentrického britského matematika Godfreye Harolda Hardyho (1877–1947). Hardy byl tak hrdý na to, že jeho práce nesestává z ničeho jiného než z čisté matematiky, že důrazně prohlašoval: „Žádný můj objev nepřinesl a pravděpodobně ani nepřinese do každodenního světa a života ani to nejmenší, přímo ani nepřímo a ať chceme nebo ne."[6] Uhodneme asi, že se mýlil. Jeden z jeho objevů se stal později součástí Hardyho-Weinbergova zákona (pojmenovaného podle Hardyho a německého fyzika Wilhelma Weinberga [1862–1937]), základního principu využívaného genetiky ke studiu vývoje populací.[7] Hardyho-Weinbergův zákon jednoduše řečeno stanoví, že pokud se rozsáhlá populace páří zcela náhodně (a nedochází k migraci, mutacím ani selekci), pak genetická skladba zůstává v každé generaci stále stejná. Dokonce i Hardyho zdánlivě zcela abstraktní práce na teorii čísel – výzkum vlastností přirozených čísel – nalezla nečekané využití. Britský matematik Clifford Cocks[8] v roce 1973 uplatnil teorii čísel k průlomu v kryptografii, tedy k vývoji kódů a šifer. Cocksovým objevem bylo překonáno i další Hardyho tvrzení. Ve své proslulé knize *Obrana matematikova* z roku 1940 Hardy prohlásil: „Nikdo ještě neobjevil sebemenší vojenský účel, jemuž by posloužila teorie čísel." Hardy se ale i zde zcela mýlil. Kódy a šifry jsou pro armádní spojení naprostou nezbytností. Takže i Hardy, jeden z nejhlasitějších kritiků aplikované matematiky, byl „zatažen" (kdyby byl naživu, jistě by se bránil zuby nehty) do tvorby prakticky užitečných matematických teorií.

To je ovšem jen vrcholek ledovce. Kepler a Newton objevili, že planety naší sluneční soustavy se pohybují po oběžných drahách tvarů elips – právě těch křivek, které před dvěma tisíciletími studoval řecký matematik Menaichmos (380–320 př. n. l.). Ukázalo se, že nové typy geometrie, které v klasické přednášce z roku 1854 nastínil Georg Friedrich Bernhardem Riemann (1826 až 1866), byly přesně těmi nástroji, které Einstein potřeboval k vysvětlení struktury kosmu. Matematický „jazyk“ zvaný teorie grup, který vyvinul geniální mladík Évariste Galois (1811–1832) jen proto, aby určil řešitelnost algebraických rovnic, se dnes stal jazykem, který dnes používají fyzikové, inženýři, jazykovědci a dokonce i antropologové k popisu veškerých symetrií, které ve světě existují.[9] Koncept matematické symetrie navíc v určitém smyslu postavil celý vědecký postup na hlavu. Cesta k porozumění kosmu vedla po staletí od shromažďování experimentálních nebo pozorování získaných faktů, z nichž se metodou pokusu a omylu vědci pokoušeli dedukovat obecné zákony přírody. Vědecký postup tak začínal dílčími pozorováními a kousek po kousku z nich sestavoval celou skládačku. Když se ve 20. století zjistilo, že v základech struktury subatomárního světa spočívají dobře definované matematické formy, začali současní fyzikové dělat přesný opak. *Nejprve* vytyčili matematické principy symetrie v přesvědčení, že fyzikální zákony a určitě i základní stavební kameny hmoty by měly sledovat určité vzory, a poté z těchto předpokladů odvodili obecné zákony. Jak příroda ví, že se musí řídit abstraktními matematickými symetriemi?

V roce 1975 si mladý matematický fyzik z Národní laboratoře v Los Alamos Mitch Feigenbaum hrál se svou kalkulačkou HP-65. Zkoumal chování jedné jednoduché rovnice. Povšiml si, že sled čísel, které se na displeji objevovaly, se stále více blížil jednomu konkrétnímu číslu: 4,669… Když se zaměřil na další rovnice, ke svému úžasu zjistil, že totéž zvláštní číslo se objevuje vždy znovu. Feigenbaum brzy usoudil, že objevil něco univerzálního, co nějakým způsobem označuje přechod od řádu k chaosu, třebaže žádné vysvětlení pro to neměl.[10] Fyzikové se k tomu podle očekávání zpočátku stavěli velmi skepticky. Proč by koneckonců mělo stále totéž číslo charakterizovat chování zjevně dost odlišných systémů? Po šesti měsících odborného posuzování nebyla první Feigenbaumova studie na toto téma přijata k publikaci. Zanedlouho však experimenty prokázaly, že když se bude kapalné helium zespodu zahřívat, bude se chovat přesně tak, jak Feigenbaumovo univerzální řešení předpovídalo. Nebyl to jediný systém, o němž se zjistilo, že funguje tímto způsobem. Udivující Feigenbaumovo číslo se ukazovalo v přechodech od uspořádaného proudění kapaliny k turbulencím a dokonce i v chování vody kapající z kohoutku.

Seznam takovýchto „předjímání“, jimiž matematici anticipovali budoucí potřeby různých vědeckých disciplín, snad nebere konce. Jeden z nejpůsobivějších příkladů záhadné a nečekané souhry mezi matematikou a reálným (fyzickým) světem poskytuje příběh *teorie uzlů* – odvětví matematické topologie zabývající se uzly. Matematický uzel připomíná běžný uzel na provaze, jehož konce jsou spojeny dohromady. Matematický uzel je tedy prostě uzavřená křivka bez volných konců. Zajímavé je, že hlavním podnětem k vývoji matematické teorie uzlů byl nesprávný model atomu z 19. století. Jakmile byl tento model opuštěn – pouhá dvě desetiletí po svém zrodu – vyvíjela se teorie uzlů dál jako relativně okrajový obor čisté matematiky. Tato abstraktní disciplína však kupodivu najednou nalezla rozsáhlé moderní aplikace v oblastech sahajících od molekulární struktury DNA po teorii strun (pokus sjednotit subatomární svět s gravitací). K tomuhle pozoruhodnému příběhu se vrátím v kapitole 8, protože jeho cyklická historie je zřejmě nejlepší ukázkou toho, jak mohou některá odvětví matematiky vznikat z pokusů o vysvětlení hmotné skutečnosti a jak se poté usadí v abstraktní říši matematiky, jen aby se nakonec nečekaně vrátila ke svým původním kořenům.

OBJEVENA, NEBO VYTVOŘENA?

Již to, co jsme zde dosud nastínili, poskytuje pádné důkazy, že vesmír je buď ovládán matematikou, nebo přinejmenším umožňuje, aby byl matematikou analyzován. Jak si ukážeme, většina lidských aktivit, ne-li všechny, se zřejmě rovněž rodí z hluboce založených matematických schopností, a to i tam, kde bychom to očekávali nejméně. Podívejme se dejme tomu na příklad ze světa financí – Black-Scholesův vzorec oceňování opcí z roku 1973.[11] Black-Scholesův model získal svým tvůrcům Nobelovu cenu za ekonomii (Myronu Scholesovi a Robertu Carhartu Mertonovi; Fischer Black zemřel před udělením ceny). Klíčová rovnice modelu umožňuje pochopit oceňování akciových opcí (opce jsou finanční instrumenty, které svým vlastníkům poskytují možnost koupit nebo prodat v budoucnu akcie za předem dohodnuté ceny). Jádrem modelu je fenomén, který fyzikové studovali po celá desetiletí – Brownův pohyb, stav rozvířeného pohybu drobných částic, například pylu ve vodě nebo částic kouře ve vzduchu. Ovšem úplně stejná rovnice platí také pro pohyb statisíců hvězd ve hvězdokupách. Není to snad, slovy *Alenky v říši divů*, „divoucnější a divoucnější“? Koneckonců, přes všechno, co se může dít ve vesmíru, jsou obchod a finance rozhodně světy vytvořené pouze lidmi.

Nebo si vezměme problém, s nímž se běžně setkávají výrobci desek plošných spojů a návrháři počítačů. K vyvrtání desítek tisíců děr do svých desek používají laserové vrtačky. K minimalizaci nákladů potřebují, aby se jejich vrtačky nechovaly jako „náhodně pobíhající turisté“. Jejich úkolem je nalézt nejkratší „trasu“ mezi děrami, a to tak, aby vrtačka navštívila každé místo určené pro díru přesně jednou. Jak však víme, matematici právě tento problém, jemuž se říká *problém obchodního cestujícího*, studovali od 20. let 20. století.[12] V podstatě v něm jde o to, že obchodník nebo politik se v rámci volební kampaně potřebuje mezi daným počtem měst přemístit co nejúspornějším způsobem a náklady na cestu mezi každou z dvojice měst jsou známy. Cestující pak musí nějakým způsobem zjistit nejlevnější trasu mezi všemi městy tak, aby se nakonec vrátil do místa, odkud vyrazil. Problém obchodního cestujícího byl v roce 1954 vyřešen pro 49 měst ve Spojených státech. Do roku 2004 již měl řešení pro 24 978 míst ve Švédsku. Jinými slovy, elektronický průmysl, přepravní firmy určující trasy pro dodávky s balíky a dokonce i japonští výrobci hracích strojů pačinko (do nichž je nutné zatlouct tisíce hřebíků), ti všichni se musí při vrtání, plánování cest nebo navrhování počítačů opírat o matematiku.

Matematika pronikla dokonce i do oblastí, které se obvykle s exaktními vědami nespojují. Existuje například periodikum *Journal of Mathematical Sociology* (má již za sebou více než 30 ročníků), který se orientuje na matematické analýzy složitých společenských struktur, organizací a neformálních skupin. Články v časopise se týkají témat sahajících od matematických modelů předpovídání veřejného mínění po předpovědi interakcí ve společenských skupinách.

Když to vezmeme z druhé strany – od matematiky ke společenským vědám – narazíme zejména na obor počítačové lingvistiky. V něm zpočátku pracovali výlučně počítačoví vědci, avšak nyní se stal interdisciplinární vědeckou disciplínou, která seskupuje lingvisty, kognitivní psychology, logiky a experty na umělou inteligenci ke společnému studiu spletitých aspektů přirozeně vzniklých jazyků.

Líčí se tu snad na nás nějaká škodolibá lest, tak aby veškeré lidské snahy o pochopení a poznání vedly k odhalování stále jemnějších a rafinovanějších zákrutů matematiky, na jejímž základě byl stvořen vesmír a my, jeho složité výtvory? Je snad matematika, jak pedagogové s oblibou říkají, něco jako schovaná učebnice – kniha, z níž učí pan profesor, ovšem svým studentům předkládá jen její velmi okleštěnou verzi, aby vypadal tím chytřeji? Nebo, abychom použili biblickou metaforu, je snad matematika v určitém smyslu slova tím hlavním ovocem stromu poznání?

Jak jsme na počátku kapitoly stručně poznamenali, nepochopitelná účinnost matematiky vytváří řadu překvapivých hádanek: je snad matematika nadána existencí zcela nezávislou na lidské mysli? Jinými slovy, je to snad tak, že matematické pravdy pouze *objevujeme*, tak jako astronomové objevují dosud nepoznané galaxie? Nebo naopak matematika není ničím jiným než lidským *výtvorem*? Pakliže matematika opravdu existuje v nějaké abstraktní platónské říši, jaký je vztah mezi tímto tajemným světem a hmotnou skutečností? Jak lidský mozek se všemi svými známými nedokonalostmi získává přístup k onomu neměnnému světu, který leží mimo čas a prostor? A na druhé straně, pokud je matematika čistě lidský výtvor a mimo naši mysl neexistuje, jak potom můžeme vysvětlit skutečnost, že vynález tolika matematických pravd tak zázračně předjímal otázky o vesmíru a lidském životě, které nebyly nastoleny ještě ani řadu staletí poté? Zodpovědět tyto hádanky není vůbec snadné. Jak si zde na řadě míst ukážeme, ani dnešní matematici, kognitivní vědci a filozofové se na odpovědích neshodnou. Francouzský matematik Alain Connes, nositel dvou nejprestižnějších matematických ocenění, Fieldsovy medaile (za rok 1982) a Crafoordovy ceny (2001), v roce 1989 vyjádřil své názory velmi jasně:

> Podívejme se například na prvočísla, která jsou podle mého názoru stabilnější realitou, než je hmotná skutečnost kolem nás. Matematika můžeme přirovnat k průzkumníkovi, který se vydává objevovat nové světy. Člověk objevuje základní fakta na základě zkušenosti. Pomocí jednoduchých výpočtů si například uvědomí, že prvočíselná řada zřejmě pokračuje donekonečna. Prací matematika pak je prokázat, že skutečně existuje nekonečné množství prvočísel. To je samozřejmě díky Eukleidovu důkazu dávno známo. Jedním z nejzajímavějších důsledků tohoto důkazu je, že když bude někdo jednoho dne tvrdit, že našel nejvyšší prvočíslo, bude snadné dokázat, že se mýlí. Totéž platí pro jakýkoli důkaz. Máme tedy co dělat s realitou naprosto stejně nespornou, jako je ta hmotná.[13]

Martin Gardner, známý autor celé řady textů z oblasti zábavné matematiky, se rovněž kloní k chápání matematiky jako *objevování*. Podle něj není sporu o tom, že čísla a matematika jsou nadány vlastní existencí, ať o tom lidé vědí, nebo ne. Jednou vtipně podotkl: „Kdyby se ke dvěma dinosaurům na louce připojili další dva, byli by tam čtyři, i kdyby to žádný člověk nepozoroval a ty potvory byly příliš pitomé na to, aby to věděly.“[14] Jak zdůrazňoval Connes, zastánci pohledu „matematika jako objevování“ (který, jak uvidíme v kapitole 2, odpovídá platónskému pohledu) poukazují na to, že jakmile byl jakýkoli matematický koncept pochopen a osvojen, jako například přirozená čísla 1, 2, 3, 4, ..., pak jsme už stáli před nepopiratelnými fakty typu $3^2 + 4^2 = 5^2$, a to bez ohledu na to, co si o tom myslíme. Přinejmenším to působí dojmem, že se tu setkáváme se skutečně existující realitou.

Jiní s tím nesouhlasí. Britský matematik Michael Atiyah (který získal Fieldsovu medaili za rok 1966 a Abelovu cenu v roce 2004) v recenzi Connesovy knihy poznamenal:

> Každý matematik musí s Connesem sympatizovat. Všichni z nás cítí, že celá čísla nebo kružnice v určitém abstraktním smyslu opravdu existují a platónský názor je mimořádně svůdný. Můžeme se však za něj skutečně postavit a hájit ho? Kdyby byl vesmír jednorozměrný, nebo dokonce nespojitý, těžko si lze představit, jak by se mohla rozvinout geometrie. Může se zdát, že s celými čísly stojíme na pevnější půdě a že počítání je vskutku něco prapůvodního. Představme si však, že by inteligence nepřebývala v lidech, ale v nějaké obrovské, osamocené a izolované medúze, ponořené v hlubinách Tichého oceánu. Ta by se nikdy nesetkala s jednotlivými objekty a znala by pouze vodu, která ji obklopuje. Jejími základními smyslovými údaji by byl pohyb, teplota a tlak. V takovém čistém kontinuu by nemohla vzniknout nespojitost, a neexistovalo by tak nic, co by se dalo počítat.[15]

Atiyah se proto domnívá, že „člověk *stvořil* [zvýraznil autor] matematiku idealizací a abstrakcí jevů fyzického světa“. Lingvista George Lakoff a psycholog Rafael Núńez mají stejný názor. Ve své knize *Where Mathematics Comes From* (Odkud pochází matematika) dospívají k závěru: „Matematika je přirozenou součástí lidské existence. Vychází z našich těl a mozků a z našich každodenních zkušeností se světem.“

Atiyahovo, Lakoffovo a Núńezovo stanovisko vyvolává další zajímavou otázku. Pokud je matematika výhradně lidským výtvorem, je potom skutečně univerzální? Jinak řečeno, kdyby existovaly mimozemské inteligentní civilizace, vypracovaly by si tutéž matematiku jako my? Carl Sagan (1934–1996) byl toho názoru, že odpověď na poslední otázku je kladná. V knize *Kosmos*, v pasáži, kde rozebíral, jaký typ signálů by inteligentní civilizace mohla vysílat do vesmíru, Sagan uvedl: „Je mimořádně nepravděpodobné, že by nějaký přírodní fyzikální proces mohl přenášet rádiové zprávy obsahující jen prvočísla. Kdybychom takovou zprávu obdrželi, mohli bychom z toho vyvodit, že existuje civilizace, která zná alespoň prvočísla.“[16] Avšak do jaké míry je to pravděpodobné? Matematický fyzik Stephen Wolfram ve své nedávné knize *A New Kind* *of Science* (Nový typ vědy) tvrdí, že to, co nazýváme „naší matematikou“, je možná jen jednou možností z široké škály různých typů a „vůní“ matematiky. Tak kupříkladu namísto toho, abychom k popisu přírody používali pravidla založená na matematických rovnicích, mohli bychom uplatňovat jiné typy pravidel, ztělesněných třeba v jednoduchých počítačových programech. Někteří kosmologové zase v poslední době diskutují o tom, zda náš vesmír není jen jedním z členů *multiverza* – ohromného souboru jednotlivých vesmírů. Pokud takové multiverzum skutečně existuje, je opravdu reálné očekávat, že ostatní vesmíry budou mít stejnou matematiku jako ten náš?

Molekulární biologové a kognitivní vědci vnášejí do hry další perspektivu, která je založena na studiu schopností mozku. Pro některé z nich se matematika neliší příliš od jazyka. Jinými slovy, podle tohoto „kognitivního“ scénáře vznikla například abstraktní definice čísla 2 poté, co lidé statisíce let zírali na své dvě ruce, dvě oči nebo dvě prsa, stejně jako slovo „pták“ se stalo označením pro mnohé dvoukřídlé živočichy, kteří umějí létat. Francouzský neurovědec Jean-Pierre Changeux to vyjádřil takto: „Podle mě je axiomatická metoda [používaná například v eukleidovské geometrii] vyjádřením schopností spojených s používáním lidského mozku. To, co charakterizuje jazyk, je právě jeho tvořivý charakter.“[17] Pokud je však matematika pouze dalším jazykem, jak vysvětlíme, že mnohé děti, které se snadno učí jazykům, mají takové potíže se studiem matematiky? Skotské zázračné dítě Marjory Flemingová (1803 až 1811)[18] roztomile popsala, na jaké obtíže žáci v matematice narážejí. Děvče, které se nedožilo devátých narozenin, po sobě zanechalo deníky s více než devíti tisíci slovy prózy a pěti sty řádky veršů. Na jednom místě si stěžuje: „Teď vám vypovím, jakou hrůzu a zoufalství mi působí násobilka; to si nikdo nedokáže představit. Nejstrašnější je 8 krát 8 a 7 krát 7; to snad nemůže vydržet ani sama příroda.“

Ze složitých otázek, které jsme zde právě nastínili, si můžeme vybrat některé základní prvky a vyjádřit je jinou formou: je nějaký zásadní rozdíl mezi matematikou a jinými výtvory lidské mysli, jakými jsou například výtvarné umění nebo hudba? Pokud ne, proč právě matematika vykazuje tak imponující logickou soudržnost a bezespornost, jaká zjevně u žádného jiného lidského výtvoru neexistuje? Eukleidovská geometrie kupříkladu zůstává dnes stejně správná (tam, kde je možné ji použít) jako kolem roku 300 př. n. l; představuje „pravdy“, které nám jsou v podstatě vnuceny, ať se nám to líbí nebo ne. Naproti tomu nás dnes nic nenutí poslouchat hudbu, kterou poslouchali staří Řekové, ani nemusíme zastávat Aristotelův naivní model kosmu.

Jen velmi málo vědeckých oborů má dnes stále ještě užitek z myšlenek starých tři tisíce let. V matematice se však poslední výzkum může na jedné straně odvolávat na věty dokázané předešlý rok nebo minulý týden, také však může použít vzorec pro výpočet obsahu povrchu koule, který dokázal Archimedes kolem roku 250 př. n. l.! Uzlový model atomu z 19. století přežil stěží dvě desetiletí, protože následné objevy ukázaly, že teorie je chybná. Tímto způsobem se věda vyvíjí a kráčí kupředu. Newton připsal zásluhu (nebo možná taky ne, viz kapitolu 4) na své vizi světa gigantům, na jejichž ramenou stál. Možná se ale měl oněm gigantům omluvit za to, že kvůli němu se jejich práce stala překonanou.

V matematice se něco takového obvykle neděje. Třebaže formální postupy pro dokázání určitých výsledků se mohou měnit, sám matematický výsledek se nemění. Jak jednou napsal matematik a spisovatel Ian Stewart: „V matematice existuje jedno slovo pro dřívější výsledky, které se později změní – říká se jim *omyly*.“[19] A tyto omyly nejsou zhodnoceny jako omyly proto, že se objevily nové poznatky, jak je tomu v jiných vědách, ale díky pečlivějšímu a přesnějšímu posouzení problému na základě stejných starých matematických pravd. Je snad matematika opravdu rodným jazykem Boha?

Pokud si myslíte, že pochopit, zda matematika byla vytvořena, nebo objevena, není až zas tak důležité, zamyslete se nad tím, jak závažný je rozdíl mezi „vytvořeným“ a „objeveným“ v této otázce: Byl Bůh vytvořen, nebo objeven? Nebo to formulujme ještě provokativněji: Stvořil Bůh lidi ke svému obrazu, nebo lidé ke svému vlastnímu obrazu vymysleli Boha?

Pokusíme se zde najít odpověď na mnohé z těchto fascinujících otázek (a ještě na pár dalších). V rámci našeho hledání se podíváme, co můžeme na toto téma získat z prací některých z největších matematiků, fyziků, filozofů, kognitivních vědců a lingvistů z minulých staletí i z nedávné minulosti. Také se budeme pokoušet poznat názory, připomínky a výhrady řady současných vědců a myslitelů. Naši vzrušující pouť začneme od průkopnických myšlenek několika velmi dávných filozofů.

KAPITOLA DRUHÁ

MYSTIKOVÉ: NUMEROLOG A FILOZOF

Lidé byli vždy hnáni touhou porozumět vesmíru. Úsilí zjistit podstatu světa, kladení otázky „jaký to má všechno smysl?“, byly daleko intenzivnější než aktivity potřebné k pouhému přežití, zlepšení hospodářské situace nebo kvality života. Samozřejmě to neznamená, že v hledání nějakého přírodního nebo metafyzického řádu se angažoval vždy každý. Jedinci, kteří zápasí o živobytí, si stěží mohou dovolit luxus hloubat nad smyslem života. V galerii těch, kdo pátrali po vzorcích a strukturách, které tvoří podstatu vnímané složitosti vesmíru, ční výrazně několik postav.

Francouzský matematik, přírodovědec a filozof René Descartes[1] (1596–1650) je pro mnohé synonymem zrození nového věku filozofie vědy. Descartes byl jedním z předních architektů přechodu od popisu světa přírody podle vlastností přímo vnímatelných našimi smysly k výkladům vyjádřených matematicky definovanými veličinami. Místo vágně charakterizovaných pocitů, pachů, barev a vjemů Descartes požadoval, aby vědecká vysvětlení zkoumala i tu zcela základní mikroúroveň a používala jazyk matematiky:

> Ve hmotném světě se nezabývám ničím jiným než tím, co geometři označují jako *veličina* a používají jako objekt svého zkoumání a důkazů … A jelikož tímto způsobem lze vysvětlit všechny přírodní jevy, nemyslím si, že ve fyzice jsou přípustné nebo žádoucí jakékoli jiné principy.[2]

Zajímavé je, že Descartes ze své velkolepé vědecké vize vyloučil říši „myšlení a představ“, kterou považoval za nezávislou na matematicky vysvětlitelném hmotném světě. Není sice pochyb, že Descartes byl jedním z nejvlivnějších myslitelů posledních čtyř staletí (vrátíme se k němu v kapitole 4), nebyl však první, kdo vyzdvihl matematiku na stupeň nejvyšší. Věřte či nevěřte, pozoruhodné myšlenky o kosmu proniknutém a ovládaném matematikou – myšlenky, které v určitém ohledu šly ještě dále než Descartovy – byly poprvé vyjádřeny, byť se silně mystickým nádechem, před více než dvěma tisíciletími. Ten, jemuž legenda připisuje postřeh, že když se mysl zabývá čistou matematikou, spočívá „v hudbě“, byl záhadný Pythagoras.

PYTHAGORAS

Pythagoras (asi 572–497 př. n. l.) byl zřejmě první, kdo byl jak vlivným přírodním filozofem, tak i charismatickým filozofem spirituálním – čili vědcem i náboženským myslitelem zároveň. Dokonce se mu připisuje zásluha,[3] že zavedl slova „filozofie“, což znamená láska k moudrosti, a „matematika“ – vyučovací předměty. Žádný z Pythagorových spisů se sice nedochoval (pokud takové spisy vůbec existovaly; většina komunikace v jeho společenství se odehrávala ústně), ze třetího století však máme k dispozici tři podrobné, byť jen zčásti spolehlivé Pythagorovy životopisy.[4] Anonymní čtvrtá biografie se zachovala ve spisech byzantského patriarchy a filozofa Fotia (asi 820–891 n. l.). Hlavní problém snah o zhodnocení Pythagorova osobního přínosu leží v tom, že jeho stoupenci a žáci – pythagorejci – bez výjimky připisovali všechny své myšlenky jemu. Proto dokonce ani Aristoteles (384–322 př. n. l.) přesně nevěděl,[5] které části pythagorejské filozofie lze bezpečně připsat samému Pythagorovi, takže obecně mluví o „pythagorejcích“ nebo „takzvaných pythagorejcích“. Vzhledem k Pythagorově pozdější proslulosti se ovšem všeobecně předpokládá, že byl autorem alespoň některých z pythagorejských teorií, které inspirovaly nejen Platóna, ale mnohem později dokonce i Koperníka.

Není vcelku pochyb, že Pythagoras se narodil počátkem šestého století před naším letopočtem na ostrově Samos blízko pobřeží dnešního Turecka. V mládí podle všeho značně cestoval, zejména do Egypta a možná i do Babylonu, kde získal minimálně část svého matematického vzdělání. Nakonec se přesunul do malé řecké kolonie Krotón na jižním cípu Itálie, kde se kolem něj shromáždila skupina nadšených žáků a stoupenců.

Řecký historik Herodotos[6] (asi 485–426 př. n. l.) se o Pythagorovi vyjádřil jako o „nejschopnějším filozofovi mezi Řeky“ a předsokratický filozof a básník Empedokles[7] (asi 492–432 př. n. l.) obdivně podotkl: „Byl však mezi nimi muž nesmírného vzdělání, který nabyl nejhlubšího bohatství vědomostí a byl největším mistrem odborných umění všeho druhu; kdykoli to celým srdcem chtěl, dokázal poznat jakoukoli pravdu o životech svých deseti, co pravím, dvaceti společníků.“ Ne všichni však byli Pythagorem nadšeni stejně. Filozof Herakleitos z Efesu (asi 535–475 př. n. l.) v poznámkách, které zřejmě vycházely z určité osobní rivality, sice oceňuje Pythagorovy široké vědomosti, rychle však přezíravě dodává: „Mnohoučenost rozumu nenaučí: jinak by byla naučila Hesioda [řecký básník, který žil kolem roku 700 př. n. l.) i Pythagora.“

Pythagoras a raní pythagorejci nebyli matematiky ani vědci v pravém smyslu slova. V centru jejich nauky spíše spočívala metafyzická filozofie významu čísel. Pro pythagorejce byla čísla živoucími objekty a univerzálními principy, které pronikají vším, od nebes po lidskou morálku. Jinak řečeno, čísla mají podle nich dva odlišné aspekty, které se vzájemně doplňují. Na jedné straně jsou nadána fyzickou existencí; na straně druhé to jsou abstraktní předpisy, na nichž je založeno všechno ve světě. Například *monáda* (číslo 1) byla chápána jednak jako původce všech dalších čísel, fenomén stejně skutečný jako třeba voda, vzduch a oheň, tedy látky podílející se na struktuře fyzického světa; na druhé straně byla pro ně ideou – metafyzickou jednotou v centru veškerého stvoření.[8] Anglický historik filozofie Thomas Stanley (1625–1678) nádherně popsal ony dva významy, které si pythagorejci spojovali s čísly:

> Číslo je dvojí podstaty, duchovní (čili nehmotné) a vědní. Stránka duchovní je věčnou podstatou čísla, o němž Pythagoras ve své rozpravě o bozích prohlašoval, že je *nejpodstatnějším principem všeho nebeského a pozemského a přírody, která je mezi nimi* ... Je tím, co se nazývá *principem, zřídlem a kořenem všech věcí* ... Vědní stránka čísla je ta, již Pythagoras definuje jako *rozprostření a vstup do aktu základních příčin, které jsou skryty v monádě nebo v kupě monád.*[9]

Čísla tedy nebyla pro pythagorejce pouhými nástroji k určení velikosti nebo množství. Musela být naopak objevována a fungovala v přírodě jako aktivní formující činitelé. Všechno ve vesmíru, od hmotných objektů jako Země po abstraktní pojmy jako spravedlnost, bylo skrz naskrz číslem.

To, že někdo pokládá čísla za fascinující fenomény, nás zřejmě nijak zvlášť nepřekvapí.[10] Koneckonců i běžná čísla, s nimiž se setkáváme v každodenním životě, mají docela zajímavé vlastnosti. Vezměme si například počet dní v roce – 365. Můžeme si snadno ověřit, že číslo 365 je rovno součtu tří po sobě následujících druhých mocnin: $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2$. To ale není všechno; je také rovno součtu dalších dvou druhých mocnin ($365 = 13^2 + 14^2$)! Nebo se podívejme na počet dní lunárního měsíce čili 28 – je součtem všech svých dělitelů (čísel, která jej dělí beze zbytku): 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14. Čísla s touto zvláštní vlastností se nazývají *dokonalá čísla* (první čtyři dokonalá čísla jsou 6, 28, 496 a 8 218). Povšimněme si také, že 28 je součtem třetích mocnin prvních dvou lichých čísel: $28 = 1^3 + 3^3$. Dokonce i číslo jako 100, které se v naší desítkové soustavě tak široce používá, má své zvláštnosti: $100 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.

No dobrá, řeknete si, takže čísla mohou být překvapivě i zajímavá. Stejně vám však může vrtat hlavou, odkud se pythagorejské nauky o číslech vlastně vzaly a co bylo jejich zdrojem. Jak vznikla myšlenka, podle níž všechny věci nejenže obsahují čísla, ale že dokonce čísly jsou? Jelikož Pythagoras buď nic nenapsal, nebo byly jeho spisy zničeny, nebude snadné na tuto otázku odpovědět. Naše znalosti a dojmy o Pythagorových argumentech jsou založeny na několika předplatónských fragmentech a dále na mnohem pozdějších a méně spolehlivých výkladech, většinou od platónských a aristotelských filozofů. Obrázek, který vzniká sestavením těchto dílčích vodítek, naznačuje, že posedlost pythagorejců čísly lze zřejmě vysvětlit jejich zaujetím pro dvě zdánlivě nesouvisející činnosti: experimenty s hudbou a pozorování oblohy.

Abychom pochopili, jak se tyto záhadné souvislosti mezi čísly, nebesy a hudbou zhmotnily, musíme začít od zajímavého poznatku, že pythagorejci měli ve zvyku znázorňovat čísla kamínky nebo tečkami. Přirozená čísla jako 1, 2, 3, 4, ..., například zpodobovali sestavováním oblázků do podoby trojúhelníků (jako na obrázku 1). Klíčový je zejména trojúhelník sestrojený z prvních čtyř celých čísel (sestavený z celkem deseti kamínků) nazývaný *tetraktys* (což znamená čtverný nebo „čtvernost“), protože ten byl pro pythagorejce symbolem dokonalosti a prvků, z nichž se skládá. Ve svém příběhu o Pythagorovi o tom mluví řecký satirik Lukianos (asi 120–180 n. l.).[11] Pythagoras kohosi požádal, aby počítal. Když muž počítal „1, 2, 3, 4“, Pythagoras jej přerušil: „Vidíš? To, co je pro tebe 4, je ve skutečnosti 10, dokonalý trojúhel-

Obr. 1 Pythagorejci měli ve zvyku znázorňovat přirozená čísla v podobě trojúhelníků.

ník a naše přísaha.“ Novoplatónský filozof Jamblichos (250–325 n. l.) uvádí, že přísaha pythagorejců zněla takto:

Tak přísahám při tom, kdo objevil Tetraktys,
jež je pramenem vší naší moudrosti
a věčným zřídlem pro nádobu přírody.[12]

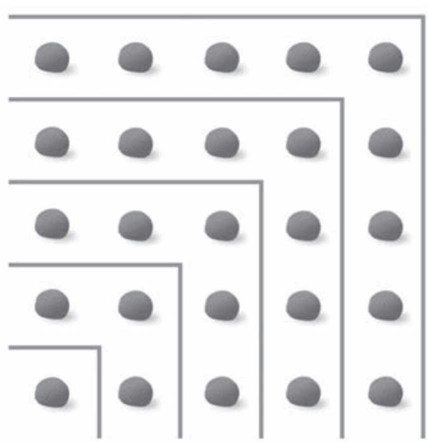
Proč pythagorejci v šestém století př. n. l. tak uctívali právě tetraktys? V jejich očích totiž zřejmě znamenala veškerou pravou povahu vesmíru. V geometrii, která se Řekům stala odrazovým můstkem k jejich epochální revoluci v myšlení, číslo 1 představovalo bod , číslo dvě reprezentovalo úsečku , trojka zastupovala plochu  a číslo 4 bylo představitelem tříprostorového čtyřbokého tělesa . Tetraktys se tak jevila jako spojení všech vnímaných dimenzí prostoru.

To však byl jen začátek. Tetraktys se nečekaně objevila i ve vědeckém přístupu k hudbě. Pythagorovi a pythagorejcům se všeobecně přikládá zásluha na objevu, že rozdělení struny jednoduchými následnými celými čísly vytváří harmonické intervaly, jak ostatně dokládá představení každého strunového kvarteta. Jestliže současně zazvučí dvě podobné struny,[13] bude výsledný zvuk libý, když délky strun k sobě budou v jednoduchém poměru. Kupříkladu struny o stejné délce (poměr 1:1) vytváří jednohlas; poměr 1 : 2 dává oktávu; 2 : 3 tvoří velkou kvintu a 3 : 4 velkou kvartu. Vedle svých všezahrnujících prostorových vlastností tak může být tetraktys chápána i jako zástupce matematických poměrů, které jsou základem hudební harmonie. Tato zjevně magická jednota prostoru a hudby byla pro pythagorejce působivým symbolem a ztělesňovala jim pocit *harmonie* (harmonia – „hodit se k sobě, spojovat“) *kosmu* (kosmos – „nádherný řád věcí“).

A jak do toho všeho zapadají nebesa? Pythagoras a pythagorejci sehráli v dějinách astronomie roli, která sice neměla zásadní význam, avšak nebyla ani zanedbatelná. Byli mezi prvními, kdo zastával názor, že Země má tvar koule (pravděpodobně z důvodu matematicko-estetické nadřazenosti koule nad jinými tvary). Byli také zřejmě první, kdo prohlašovali, že planety, Slunce a Měsíc vykazují navzájem nezávislý pohyb od západu na východ, tedy opačným směrem než každodenní (zdánlivá) rotace sféry neměnných hvězd. Tito nadšení pozorovatelé půlnoční oblohy si nemohli nevšimnout ani nejviditelnějších vlastností souhvězdí – jejich tvarů a počtu členů. Každé souhvězdí se rozeznává podle počtu hvězd, z nichž se skládá, a podle geometrického obrazce, které tvoří. Tyto dvě charakteristiky však byly přesně tou podstatnou ingrediencí pythagorejské nauky o číslech, jejíž součástí je i tetraktys. Pythagorejci byli tak uneseni geometrickými obrazci, souhvězdími a hudebními harmoniemi spočívajícími na číslech, že se jim čísla stala jak stavebními kameny vesmírné struktury, tak i principy existence kosmu vůbec. Není divu, že Pythagoras ve svém aforismu tak důrazně prohlašoval, že „číslu podobá se všechno“.

Svědectví o tom, jak vážně pythagorejci tento výrok brali, nalezneme ve dvou Aristotelových poznámkách. Na jednom místě své *Metafyziky* filozof píše: „Takzvaní pythagorejci se věnovali naukám matematickým a jako první v nich značně pokročili. Poněvadž se jim zcela oddali, domnívali se, že jejich počátky jsou počátky jsoucna vůbec.“ V další pasáži Aristoteles živě popisuje uctívání čísel a výsostnou roli tetraktys. „Eurytos [žák pythagorejce Filolaa] určil, které číslo každá věc má, které má člověk, které kůň, přičemž tvary živočichů a rostlin zobrazoval počtářskými kamínky jako ti, kdo z čísel sestavují obrazce trojúhelníku a čtyřúhelníku“. Poslední věta („obrazce trojúhelníku a čtyřúhelníku“) je narážkou jak na tetraktys, tak na další fascinující pythagorejský výtvor – gnómon.

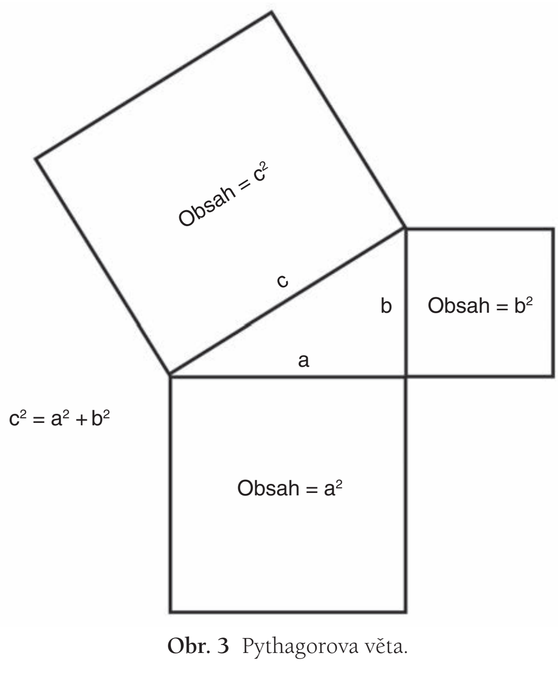
Slovo „gnómon“ (ukazatel)[15] pochází z označení babylonského astronomického zařízení pro měření času, podobného slunečním hodinám. Do Řecka tento aparát podle všeho přinesl Pythagorův učitel, přírodní filozof Anaximandros (asi 611–547 př. n. l.). Anaximandrův žák byl bezpochyby ovlivněn učitelovými myšlenkami o geometrii a jejím využití v kosmologii. Později se termín „gnómon“ používal pro nástroj tvaru L pro rýsování pravých úhlů, něco jako tesařské pravítko, ale i pro čtvercový obrazec, z něhož se rozšířením na dvou stranách stane větší čtverec (jako na obrázku 2). Všimněme si, že když



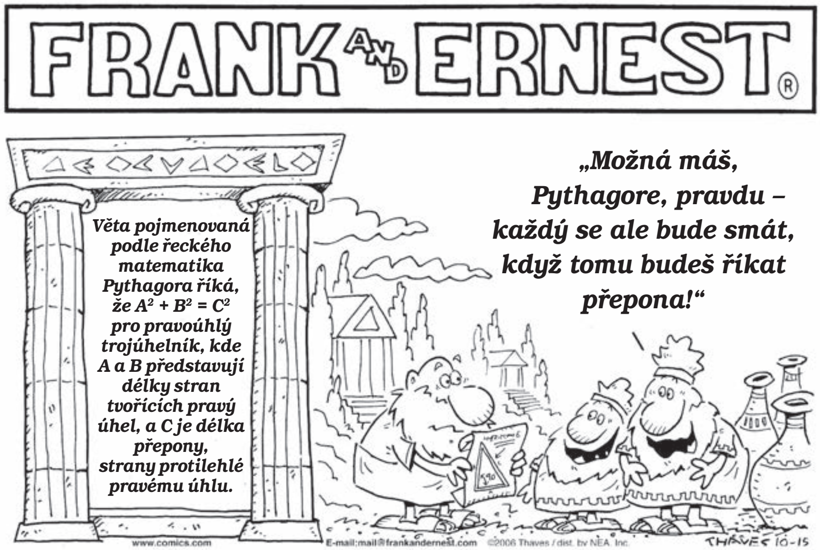
Obr. 2
„Rozšiřování“ čtverce – součet posloupností lichých čísel dá vždy druhou mocninu

například ke čtverci 3 x 3 přidáme sedm kuliček sestavených do pravého úhlu (gnómon), dostaneme čtverec složený ze šestnácti (4×4) kuliček. Je to názorné zobrazení následující vlastnosti: V posloupnosti lichých čísel 1, 3, 5, 7, 9,..., součet jakéhokoli počtu následných členů (počínaje 1) dá vždy nějakou druhou mocninu. Například $1 = 1^2$; $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$; $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$, a tak dál. Pythagorejci pokládali důvěrný vztah mezi gnómonem a čtvercem, který jej „objímá", za obecný symbol vědění, protože vědět znamená „objímat" poznané. Čísla se tak neomezovala na pouhý popis fyzického světa, ale předpokládalo se o nich, že jsou také jádrem mentálních a emočních procesů.

Druhé mocniny spojené s gnómony možná byly předchůdci všeobecně známé Pythagorovy věty. Tento slavný matematický výrok říká, že pro jakýkoli pravý úhel (obrázek 3) bude čtverec narýsovaný nad přeponou roven co do obsahu součtu čtverců nad oběma stranami čili odvěsnami. Objev této věty humorně zachytil kreslený vtip ze série *Frank a Ernest* (obrázek 4). Jak ukazuje gnómon z obrázku 2, přidáme-li gnómonovou druhou mocninu $9 = 3^2$ ke čtverci 4×4, dostaneme nový čtverec $5 \times 5 : 3^2 + 4^2 = 5^2$. Čísla 3, 4 a 5 tak mohou zastupovat délky stran pravoúhlého trojúhelníku. Celá čísla, která mají tuto vlastnost (např. 5, 12, 13, jelikož $5^2 + 12^2 = 13^2$), se nazývají „pythagorejské trojice".



Obr. 3 Pythagorova věta.



Obr. 4

Málokterá matematická věta se těší tak všeobecné známosti jako Pythagorova. Když v roce 1971 Nikaragua jako téma pro novou sérii známek vybrala „deset matematických rovnic, které změnily tvář světa“, dostala se Pythagorova věta na druhou známku série (obrázek 5; první známka znázorňovala „1 + 1 = 2“).

Byl Pythagoras vskutku první, kdo formuloval známou větu, jež se mu připisuje? Někteří raní řečtí historikové si to jistě mysleli. V poznámkách k Euklei-

Obr. 5 Pythagorova věta se dostala i na poštovní známky.

dovým (asi 325–265 př. n. l.) *Základům*, rozsáhlému pojednání o geometrii a teorii čísel, filozof Proklos (asi 411–485 n. l.) napsal: „Nasloucháme-li těm, kdo chtějí líčit dávnou historii, možná najdeme některé, kdo připisují tuto větu Pythagorovi a říkají, že na počest svého objevu obětoval vola.“[15] Jenomže pythagorejské trojice můžeme najít již na babylonské destičce s klínovým písmem označené jako Plimton 322, která pochází zhruba z dob dynastie Chammurapiho (asi 1900–1600 př. n. l.). Navíc geometrické konstrukce založené na Pythagorově větě byly nalezeny i v Indii v souvislosti se stavbami oltářů. Tyto konstrukce určitě znal autor *Satapatha Brahmana*, komentářů ke starověkým indickým posvátným textům z doby nejméně několik staletí před Pythagorem[16]. Ať už však Pythagoras tvůrcem věty byl, nebo ne, není pochyb, že odhalení opakujících se vztahů, v nichž se dohromady splétají čísla, tvary i vesmír, dostalo pythagorejce o jeden krok blíže k detailní metafyzice světového řádu.

Další představou, která v pythagorejském světě hrála ústřední roli, byla myšlenka *kosmických protikladů*. Koncept protikladů byl základním principem rané iónské vědecké tradice, takže bylo jen přirozené, že jej přijali i řádem posedlí pythagorejci. Aristoteles uvádí, že názor, podle něhož je všechno na světě sestaveno a vyváženo do párů, zastával dokonce jeden lékař jménem Alkmeon, který žil v Krotónu v době, kdy tam Pythagoras provozoval svou proslulou školu. Základním párem byl protiklad *omezeného*, které je zastupováno lichými čísly, a *neomezeného*, představovaného čísly sudými. Omezenost byla síla, která do divokého a nespoutaného neomezena zavádí řád a harmonii. Představa byla taková, že jak veškerá spletitost celého vesmíru, tak mikrokosmická komplexnost lidského života sestávají a jsou ovládány řadami protikladů, které určitým způsobem zapadají do sebe. Tuto poněkud černobílou vizi světa shrnovala „tabulka protikladů“, která se uchovala v Aristotelově *Metafyzice*:

omezené	neomezené
liché	sudé
jedno	mnohost
pravé	levé
mužské	ženské
věc v klidu	věc v pohybu
přímé	křivé
světlo	temnota
dobré	zlé
čtvercové	podélné

Základní přístup, který tabulka protikladů vyjadřuje, se neobjevuje jen ve starověkém Řecku.[17] V zásadě stejnou představu před nás staví čínské principy jin a jang, kde jin představuje negativitu a temnotu, zatímco jang je principem světla. Principu protikladů není nijak vzdálen ani pohled, který se v křesťanství vtělil do podoby nebe a pekla (a v moderní době do nesmiřitelných prohlášení typu „kdo nejde s námi, jde proti nám“). Všeobecně můžeme poukázat na to, že smysl života je do značné míry osvětlován existencí smrti a že význam poznání se nejlépe ocení ve srovnání s nevědomostí.

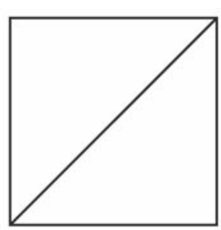
Celé pythagorejské učení se však nevyčerpávalo jen čísly. Způsob života úzce stmelené pythagorejské společnosti byl založen rovněž na vegetariánství, hluboké víře v metempsychózu neboli nesmrtelnost a stěhování duší a také na poněkud záhadném zákazu pojídání bobů. Pro toto omezení se uvádí několik možných vysvětlení – od podobnosti bobů s varlaty po přirovnávání konzumace bobů k pojídání živé duše. Poslední zmíněná interpretace považovala únik větrů, který po pojídání bobů často následuje, za projev skomírajícího dechu snědené duše. Knížka *Philosophy for Dummies* (Filozofie pro hloupé)[18] shrnula pythagorejskou doktrínu takto: „Všechno je z čísel a nejez boby, protože se nedopočítáš problémů.“

Nejstarší známá historka o Pythagorovi[19] se vztahuje k víře v převtělování duší do jiných stvoření. Následující až poetická zkazka pochází ze šestého století př. n. l. od básníka Xenofana z Kolofónu: „Kráčeje jednou kolem a slyše, jak kdos týrá psíka, lítost prý nad tím měl a toto slovo mu děl: ‚Ustaň a nebij ho již! Vždyť je to mého přítele duše, kterou jsem rozeznal hned, sotva jsem uslyšel hlas.‘ “

Nepochybnou Pythagorovu stopu lze nalézt nejen v učeních řeckých filozofů, kteří přišli bezprostředně po něm, ale dokonce až v osnovách středověkých univerzit. Sedmero předmětů, které se tehdy na univerzitách vyučovalo, se rozdělovalo na *trivium*, kam patřila dialektika, gramatika a rétorika a *kvadrivium*, což byly oblíbené obory pythagorejců – geometrie, aritmetika, astronomie a hudba. Nebeská „harmonie sfér“ – hudba, kterou prý vydávají planety na oběžných drahách a kterou podle Pythagorových žáků dokázal zaslechnout jen jejich mistr – inspirovala básníky i vědce. Slavný astronom Johannes Kepler (1571–1630), objevitel zákonů pohybů planet, si pro jednu ze svých vlivných prací vybral titul *Harmonice Mundi* (Harmonie světa). V pythagorejském duchu dokonce k různým planetám přiřadil krátké hudební „nápěvy“ (podobně jako o tři staletí později skladatel Gustav Holst).

Pokud se na Pythagora podíváme z hlediska otázek,[20] jejichž řešením se zde zabýváme, pak jakmile jeho filozofii zbavíme mystického hávu, zůstane kostra, která je pořád navýsost důležitou výpovědí o matematice, její povaze a jejím vztahu jak k fyzickému světu, tak k lidské mysli. Pythagoras a pythagorejci byli praotci hledání kosmického řádu. Mohou být považováni za zakladatele čisté matematiky, protože na rozdíl od svých předchůdců – Babyloňanů a Egypťanů – se matematikou zabývali jako abstraktním oborem, odděleně od všech praktických účelů. Otázka, zda pythagorejci ustavili matematiku jako nástroj vědy, je poněkud komplikovanější. Pythagorejci sice spojovali všechny jevy s čísly, cílem jejich studia však byla čísla sama – nikoli jevy nebo jejich příčiny. To pro vědecký výzkum ovšem nebyl příliš přínosný směr uvažování. V základech pythagorejské nauky však stála nevyslovená víra v existenci obecných zákonů přírody. Toto přesvědčení, které se stalo ústředním pilířem moderní vědy, možná mělo kořeny v pojetí Osudu ve starořecké tragédii. Odvážná víra v reálnou existenci souboru zákonů, které dokážou vysvětlit všechny jevy, přežívala až do renesance, aniž mohla být podložena nějakými konkrétními důkazy. Až Galileo, Descartes a Newton z ní učinili hypotézu obhájitelnou na základě indukce, tedy usuzování z konkrétních případů na obecný zákon.

Dalším významným příspěvkem, který je nutné připsat pythagorejcům, bylo střízlivé zjištění, že jejich vlastní „náboženství čísel“ ve skutečnosti žalostně nefunguje. Celá čísla 1, 2, 3,..., nestačí ani k vybudování matematiky, natož k popisu celého vesmíru. Podívejme se například na obrázek 6, kde strana čtverce má délku jedné jednotky a kde délku úhlopříčky označíme d. Délku úhlopříčky snadno zjistíme, když na kterýkoli ze dvou pravoúhlých trojúhelníků, na něž je čtverec rozdělen, uplatníme Pythagorovu větu. Ta říká, že druhá mocnina úhlopříčky, tedy čtverec nad přeponou, se rovná součtu druhých mocnin dvou kratších stran: $d^2 = 1^2 + 1^2$, tj. $d^2 = 2$. Jakmile známe druhou mocninu kladného čísla, najdeme číslo samo jejím odmocněním (např. pokud $x^2 = 9$, kladné $x = \sqrt{9} = 3$). Takže z $d^2 = 2$ plyne, že $d = \sqrt{2}$. Poměr délky úhlopříčky k délce strany čtverce je tak číslo $\sqrt{2}$. Zde však nastal pro pythagorejce šok – zjištění, které celou přepečlivě zkonstruovanou pythagorejskou filozofii celých čísel rozneslo na kopytech. Jednomu z pythagorejců (zřejmě Hippaso-



Obr. 6 Úhlopříčka jednotkového čtverce má velikost $d = \sqrt{2}$.

vi z Metapontu, který žil v první polovině pátého století př. n. l.)[21] se podařilo dokázat, že druhou odmocninu ze dvou nelze vyjádřit poměrem žádných dvou celých čísel. Jinými slovy, třebaže si můžeme vybrat z nekonečného počtu celých čísel, hledání takových dvou, která by dala poměr $\sqrt{2}$, je od počátku beznadějné. Čísla, která lze vyjádřit jako poměr dvou celých čísel (např. 3/17; 2/5; 1/10; 6/1), se nazývají *racionální čísla*. Pythagorejci dokázali, že $\sqrt{2}$ racionální číslo není. Brzy po původním objevu dokonce začalo být jasné, že racionální nejsou ani $\sqrt{3}$, $\sqrt{17}$ a ani druhá odmocnina žádného čísla, které nelze odmocnit beze zbytku (jako lze např. 16 nebo 25). Důsledky byly dramatické – pythagorejci ukázali, že nekonečno racionálních čísel musíme rozšířit o nekonečno nového druhu čísel – takových, která dnes označujeme jako *iracionální*. Význam tohoto objevu pro následný vývoj matematické analýzy nelze docenit. Mezi jiným to v 19. století vedlo k uznání existence „spočetných" a „nespočetných" nekonečen.[22] Pythagorejci byli ovšem touto svou filozofickou krizí podle podání filozofa Jamblicha[23] tak zdrceni, že člověk, který iracionální čísla objevil a jejich povahu odhalil „těm, kdo toho nebyli hodni", „upadl v takovou nenávist, že nejenže mu byla odepřena účast ve [pythagorejském] společenství a jejich způsobu života, ale dokonce mu postavili hrobku, jako by bývalého kolegu chtěli vytěsnit ze života mezi lidmi".

Snad ještě významnější než objev iracionálních čísel byl Pythagorův průkopnický požadavek matematického důkazu – postupu založeného výlučně na logickém uvažování, kterým se z určitých předpokladů dala jednoznačně určit platnost nějakého matematického výroku. Před Řeky ani matematici nepředpokládali, že by měl někdo vůbec nějaký zájem na duševních útrapách spojených s objevy takového druhu. Dostatečným důkazem již pro ně bylo, pokud nějaký matematický předpis fungoval v praxi – řekněme k rozdělování půdních parcel. Pojem důkazu sice zřejmě jako první zavedl filozof Thales z Milétu (asi 625–547 př. n. l.), právě pythagorejci však z této praxe učinili dokonalý nástroj k potvrzování matematických pravd. Význam tohoto průlomu v logice byl enormní. Důkazy plynoucí z postulátů okamžitě postavily matematiku na mnohem pevnější základ, než měl jakýkoli jiný obor, o němž filozofové tehdy diskutovali. Jakmile byl předložen přísně logický důkaz vyvozený v jednotlivých krocích, kde nezůstaly žádné mezery, platnost dokázaného matematického tvrzení již byla v podstatě neotřesitelná. Zvláštní postavení matematického důkazu oceňoval i tvůrce nejslavnějšího detektiva na světě Arthur Conan Doyle. V příběhu *Studie v Šarlatové* Sherlock Holmes prohlašuje, že jeho závěry jsou „tak neklamné jako věty Eukleidovy".

MYSTIKOVÉ: NUMEROLOG A FILOZOF

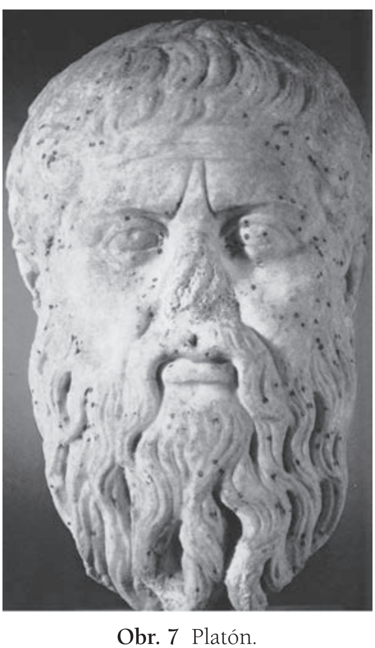
V otázce, zda byla matematika objevena, nebo vytvořena, neměl Pythagoras ani pythagorejci žádných pochyb – matematika reálně existuje, je neměnná, všudypřítomná a je tím nejlepším, co kdy mohlo z chabé lidské mysli vzejít. Pythagorejci vesmír doslova vložili do matematiky. Pro Pythagorejce otázka nestála tak, zda je Bůh matematik – pro ně sama *matematika byla Bůh*![23]

Význam pythagorejské filozofie nespočívá pouze v její vlastní vnitřní hodnotě. Tím, že pythagorejci připravili scénu a do určité míry i předurčili agendu pro příští generaci filozofů, zejména Platóna, získali v dějinách západního myšlení jednu z důležitých pozic.

V PLATÓNOVĚ JESKYNI

Známý britský matematik a filozof Alfred North Whitehead (1861–1947) jednou poznamenal, že „nejbezpečnějším zevšeobecněním o dějinách západní filozofie je, že je to jen sled komentářů k Platónovi".[24]

Platón (asi 428–347 př. n. l.) byl vskutku prvním, kdo vzal témata z různých oborů od matematiky, přírodních věd a jazyků po náboženství, etiku a umění, a pojednal je jednotným způsobem, jímž v podstatě definoval filozofii jako zvláštní disciplínu. Pro Platóna nebyla filozofie nějakým abstraktním předmětem odděleným od každodenních aktivit, ale naopak nejdůležitějším vodítkem k tomu, jak by měli lidé žít, poznávat pravdu a vést politickou činnost. Zejména zdůrazňoval, že filozofie nám může otevřít přístup do říše pravd, která se prostírá daleko za tím, co jsme schopni přímo vnímat smysly nebo i vyvozovat pomocí obyčejného selského rozumu. Kdo byl tento neúnavný hledač čistého vědění, absolutního dobra a věčných pravd?[25]



Obr. 7 Platón.

Platón se narodil v Aténách nebo na blízkém ostrově Aigina jako syn Aristona a Periktione. Na obrázku 7 vidíme římskou bustu Platóna, která je pravděpodobně kopií staršího řeckého originálu ze čtvrtého století př. n. l. Platónova rodina se pyšnila dlouhou řadou význačných předků z obou stran, mezi nimiž byly takové postavy jako slavný zákonodárce Solón nebo mytický poslední aténský král Kodros. Platónův strýc Charmides a jeho bratranec z matčiny strany Kritias byli dobrými přáteli věhlasného filozofa Sokrata (asi 470–399 př. n. l.) a právě tento vztah měl na mladého Platóna určující vliv. Původně měl Platón v úmyslu vstoupit do politiky, avšak po sérii násilných akcí ze strany politické frakce, která se ho snažila získat, svůj záměr přehodnotil. Později zřejmě Platóna nechuť k politice povzbudila k tomu, aby nastínil podle jeho názoru to, co je nezbytné ke vzdělání budoucích strážců státu. Dokonce se pokoušel (bezúspěšně) vyučovat vládce Syrakús Dionýsia II.

Po Sokratově popravě v roce 399 př. n. l. se Platón vydal na dlouhé putování po světě, které ukončil až roku 387 př. n. l., kdy založil proslavenou Akademii, školu pro filozofi a vědu. Platón zůstal ředitelem Akademie (*scholarchou*) až do smrti a poté jej ve vedení instituce vystřídal jeho synovec Speusippos. Na rozdíl od dnešních akademických ústavů byla aténská Akademie spíše neformálním shromážděním intelektuálů, kteří se pod Platónovým vedením věnovali celému spektru aktivit. Nevybíralo se zde žádné školné, neexistovalo předem stanovené učivo a dokonce tu nebyli ani opravdoví učitelé. I tak tu však podle všeho platila jedna dosti neobvyklá „vstupní podmínka“. Podle slov římského císaře Juliana Apostaty ze čtvrtého století n. l.[26] visel nad vchodem do Platónovy Akademie tísnivý nápis, který zněl: „Nechť nevstupuje nikdo, kdo nezná geometrii.“ Jelikož mezi založením Akademie a první zmínkou o takovém nápisu uběhlo nejméně osm staletí, nemůžeme si být vůbec jisti, zda nad vchodem něco takového opravdu bylo. Není však pochyb, že postoj vyjádřený oním náročným požadavkem byl i Platónovým osobním názorem. V jednom ze svých slavných dialogů *Gorgias* Platón napsal: „Geometrická rovnost má velký význam mezi bohy i mezi lidmi.“

„Studenti“ Akademie byli v zásadě existenčně soběstační a někteří z nich – za všechny jmenujme velkého Aristotela – zde zůstávali až dvacet let. Platón považoval takový dlouhodobý kontakt mezi tvůrčími duchy za nejlepší prostředí pro zrod nových myšlenek ve všech oblastech, od abstraktní metafyziky a matematiky po etiku a politiku. Čistota a téměř božské vlastnosti Platónových žáků nádherně vystihuje malba *Platónská škola* od belgického symbolisty Jeana Delvillea (1867–1953). Aby malíř zdůraznil duševní kvality studentů, namaloval je obnažené a tak, aby vypadali jako hermafroditi, protože takoví podle dobových představ byli lidé v původním, ideálním stavu.

Zklamalo mě, když jsem se dozvěděl, že archeologové nebyli schopni nalézt žádné pozůstatky Platónovy Akademie.[27] Na cestě po Řecku v létě ro-

Obr. 8 Dnešní podoba aténské Agory.

ku 2007 jsem proto hledal, co je tomu nejblíž. Platón se zmiňuje o oblíbeném místu rozprav s přáteli nazývaném Diova stoa (krytá kolonáda postavená v pátém století př. n. l.). Ruiny této památky jsem nalezl v severozápadní části starověké Agory v Aténách (v Platónově době to bylo městské centrum; obrázek 8). Musím říci, že i když ten den teplota dosahovala 46 °C, přece jen mě trochu mrazilo v zádech, když jsem kráčel stejnou cestou, kterou tento velikán procházel stokrát, ne-li tisíckrát.

Legendární nápis nad vchodem do Akademie vypovídá o Platónově přístupu k matematice zcela jasně. Většinu významného matematického výzkumu ve čtvrtém století př. n. l. vedli lidé tak či onak spojení s Akademií. Sám Platón se ovšem jako matematik nevyznačoval žádným hlubším nadáním k odborným výzkumům a jeho přímý přínos k matematickému poznání byl pravděpodobně jen minimální. Byl však nadšeným divákem, motivujícím zdrojem nápadů a otázek, duchaplným kritikem a inspirujícím rádcem. Názorně o tom píše filozof a historik z prvního století př. n. l. Filodemos:[28] „V té době se v matematice odehrával úžasný pokrok a Platón v něm hrál roli hlavního architekta, který předkládal problémy a matematici je pak soustředěně řešili.“ Novoplatónský filozof a matematik Proklos k tomu dodává:[29] „Platón ... dění v matematice obecně a zejména v geometrii díky svému nadšení pro jejich studium výrazně urychlil. Je dobře známo, že jeho spisy jsou hustě protkány matematickými pojmy a že se vždy a všude snaží ve studentech filozofie vzbudit k matematice obdiv.“ Jinak řečeno, Platón, který znal matematiku na nejvyšší soudobé úrovni, mohl debatovat s matematiky jako rovný s rovnými a mohl jim předkládat problémy k řešení, byť jeho osobní výkony v matematice nebyly nijak významné.

Další pozoruhodnou ukázkou toho, jak Platón matematiku oceňoval, najdeme v jeho zřejmě největším díle *Ústava*, ohromující syntéze estetiky, etiky, metafyziky a politiky. V sedmé knize *Ústavy* Platón (prostřednictvím ústřední postavy Sokrata) nastiňuje ambiciózní plán vzdělávání, jehož cílem je formování budoucích vládců utopického státu. Přesně rozvržený, byť idealizovaný učební plán zahrnoval nejprve učení v raném dětství formou her, cestování a gymnastiky. Po výběru slibných adeptů program pokračuje nejméně deseti lety výuky matematiky, pěti lety dialektiky a patnácti lety sbírání praktických zkušeností, kam patřilo například velení v době války a další činnosti „vhodné pro mládež“. Platón jasně vysvětlil, proč si myslí, že právě to je nezbytná příprava budoucích politiků:

> Jistě je však třeba, aby se o ni [veřejnou moc] ucházeli ti, kteří vášnivě netouží po vládě. V opačném případě by pak o ni vedli boj žárliví rivalové. Které další lidi budeš potom nutit, aby šli střežit obec, než ty nejuvážlivější v tom, co obci přináší nejlepší správu, a znalé jiných poct a lepšího způsobu života, než má ten, kdo se jen věnuje správě své obce?[30]

Osvěžující čtení, že? Tak náročný program byl pravděpodobně v praxi nesplnitelný i v Platónových dobách, například George Washington však souhlasil s tím, že vzdělání v matematice a filozofii není pro budoucí politiky až tak špatný nápad:

> Věda o číslech do určité míry není jen nepostradatelnou součástí každé činnosti civilizovaného života; zkoumáním matematických pravd si také mysl přivyká na metodu a správný způsob uvažování a je to zaměstnání pro rozumem obdařenou bytost zvláště vhodné. V mlhami zastřeném světě, kde se často bezmocnému zkoumání zdá tolik věcí stěží proniknutelných, je to právě zde, kde schopnosti rozumu nalézají základ, na němž mohou spočinout. Z vysoké úrovně matematických a filozofických důkazů se lze bez většího úsilí odrazit k daleko vybranějším hloubáním a vznešenějším meditacím.

Co se týče otázky charakteru matematiky, Platón pro nás není ani tak důležitý jako matematik nebo inspirátor matematiky, ale jako její filozof. Nejenže