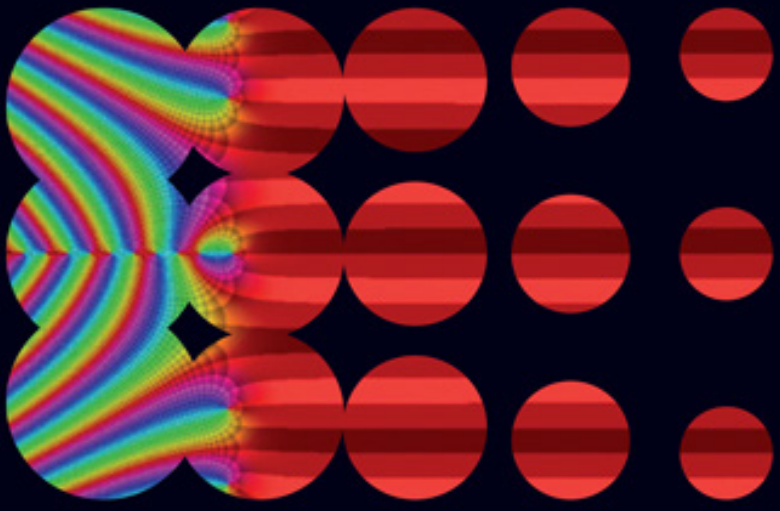
Marcus du Sautoy

HUDBA PRVOČÍSEL

Dvě století Riemannovy hypotézy



argo / dokořán

Marcus du Sautoy

HUDBA PRVOČÍSEL

Dvě století Riemannovy hypotézy

ARGO / DOKOŘÁN

Marcus du Sautoy

HUDBA PRVOČÍSEL

Dvě století Riemannovy hypotézy

Copyright © 2003 by Marcus du Sautoy
Translation © Luboš Pick, Mirko Rokyta, 2019

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace
nesmí být rozmnožována a rozšiřována jakýmkoli způsobem
bez předchozího písemného svolení nakladatele.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu T*he Music of the Primes. Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics* přeložili Luboš Pick a Mirko Rokyta.
Grafická úprava Vladimír Fára, sazba Karel Horák.
Obálka Michal Puhač podle návrhu Pavla Růta.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Redakce Marie Černá.
Vydalo v roce 2020 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1036. publikaci (317. elektronická).

ISBN 978-80-7363-976-1

Věnováno památce
Yonathana du Sautoye,
21. října 2000

OBSAH

Kapitola 1. Chcete být milionářem? 11

Kapitola 2. Atomy aritmetiky 30
Honba za strukturami 36
Důkaz, pilíř matematiky 40
Eukleidovy báje 47
Na lovu prvočísel 51
Euler, matematický orel 54
Gaussův odhad 59

Kapitola 3. Riemannovo imaginární matematické zrcadlo 72
Komplexní čísla – nová matematická vize 80
Svět za zrcadlem 85
Funkce zeta – dialog mezi hudbou a matematikou 90
Řecká legenda o prvočíslech v novém hávu 94

Kapitola 4. Riemannova hypotéza: od nesourodých prvočísel k ukázněným kořenům 98
Prvočísla a kořeny 103
Hudba prvočísel 108
Riemannova hypotéza – řád vycházející z chaosu 112

Kapitola 5. Matematická štafeta: uvedení Riemannovy revoluce do života 117
Hilbert, krysař matematiky 122
Landau, mistr potížistů 132
Hardy, estét matematiky 135
Littlewood, matematický střelec 140

Kapitola 6. Ramanujan, matematický mystik 149
Cambridgeský střet kultur 158

Kapitola 7. Matematický exodus: z Göttingenu do Princetonu 166
Riemann znovu a jinak 168
Selberg, osamělý Viking 175
Erdős, kouzelník z Budapešti 181
Uspořádané kořeny a nahodilá prvočísla 185
Matematická polemika 187

Kapitola 8. Myšlenkové počítače 194
Gödel a omezené možnosti matematiky 197
Turingův zázračný myšlenkový stroj 202
Kladky, táhla a převody 208
Od chaosu a nejistoty k prvočíselné rovnici 214

Kapitola 9. Éra počítačů: od těch myšlenkových až k desktopům 226
Je počítač hrobníkem matematiky? 232
Zagier, matematický mušketýr 236
Odlyzko, mistr výpočtů z New Jersey 242

Kapitola 10. Rozkládání čísel a luštění šifer 247
Zrození internetové kryptografie 248

RSA, trojice z MIT 251
Kryptografický karetní trik 256
Hozená rukavice jménem RSA 129 260
Nová esa v rukávu 262
Pštrosí taktika 265
Na lovu velkých prvočísel 269
Budoucnost je nejen světlá, je i eliptická 271
Svéráz chaldejské poezie 275

Kapitola 11. Od uspořádání kořenů ke kvantovému chaosu 281
Dyson, žabí král fyzikálních věd 289
Kvantové bubny 292
Fascinující rytmus 295
Kouzla matematiky 299
Kvantový biliár 304
42 – odpověď na základní otázku života, vesmíru a vůbec 310
Riemannova závěrečná úklona 316

Kapitola 12. Chybějící dílek skládačky 318
Znalec mnoha jazyků 319
Nová francouzská revoluce 330
O žertu, který vše ukončil 337

Poděkování 348
Literatura 351
Zdroje ilustrací 357
Rejstřík 358

KAPITOLA PRVNÍ

CHCETE BÝT MILIONÁŘEM?

„A víme vůbec, co je to za posloupnost? Počkejte, na to snad přijdeme i bez papíru, tak jak to je, ... padesát devět, šedesát jedna, šedesát sedm, sedmdesát jedna... a nejsou to náhodou všechna prvočísla?" Velínem proběhlo vzrušené zašumění. I Elliina vlastní tvář v nestřežené chvilce prozradila hluboké vzrušení, rychle ale nasadila kamenný výraz, aby nevypadala jako někdo, kdo se snadno nechá unést, což by mohlo působit pošetile a nevědecky.

Carl Sagan, *Kontakt*

Jednoho dusného srpnového rána roku 1900 naslouchal přeplněný sál pařížské Sorbonny přednášce Davida Hilberta z univerzity v Göttingenu. Konala se zde právě významná akce, slavný Mezinárodní kongres matematiků. Hilbert, pokládaný za jednoho z největších matematiků své doby, si pro tuto příležitost připravil neobvykle odvážnou přednášku. Na rozdíl od jiných nemluvil o svých výsledcích. Místo toho se rozhovořil o tom, co známo není. To bylo proti všem zavedeným zvyklostem a posluchači si nemohli nepovšimnout jisté nervozity v jeho hlase, když předložil svou vizi perspektivy matematiky. „Kdo z nás by nechtěl poodhalit závoj, za kterým se skrývá naše budoucnost, popatřit na další pokroky naší vědy a na její vývoj v nadcházejícím století?" Hilbert nové století uvítal jako pravý zvěstovatel budoucnosti a svému publiku předložil neslýchanou výzvu sestávající ze seznamu třiadvaceti nevyřešených problémů. Ty podle něj měly nasměrovat matematický výzkum 20. století.

Mnoho problémů z Hilbertova seznamu bylo vyřešeno během následujících desetiletí. Jejich přemožitelé tvoří proslulou skupinu matematiků zvanou „čestná jednotka". Patří do ní například Kurt Gödel nebo Henri Poincaré a mnoho dalších průkopníků matematiky, jejichž nápady pomohly změnit matematickou krajinu k nepoznání. Jeden z Hilbertových problémů, na seznamu uvedený jako osmý, ovšem hned od začátku sliboval, že by mohl 20. století přežít a nenalézt přitom svého přemožitele. Říká se mu „Riemannova hypotéza".

Z výzev, které Hilbert matematikům předložil, zastávala ta osmá v jeho srdci výsadní místo. Existuje stará německá báje vyprávějící o Friedrichu Barbarossovi. Tento lidem milovaný německý císař zahynul během třetí křížové výpravy. Legenda ovšem praví, že Barbarossa je stále živ a pouze upadl do spánku kdesi v jeskyni v Kyffhäuserských horách. Probudí se tehdy, až jej bude jeho Německo zase potřebovat. Říká se, že se kdosi Hilberta zeptal: „Kdybyste měl podobně jako Barbarossa obživnout po pěti stech letech, co byste dělal?“ Hilbert odpověděl: „Zeptal bych se, jestli už někdo dokázal Riemannovu hypotézu.“

Jak se tak 20. století chýlilo ke konci, většina matematiků se pomalu smiřovala s tím, že tento klenot mezi Hilbertovými problémy nejen pravděpodobně přežije století, ale nejspíš opravdu zůstane nevyřešen ještě i po dalších čtyři sta let, než se Hilbert probudí. Hilbert úspěšně šokoval účastníky prvního matematického kongresu 20. století přednáškou o tom, co nevíme. Na účastníky posledního kongresu století ale také čekalo překvapení.

Dne 7. dubna 1997 se na počítačových obrazovkách po celém matematickém světě rozzářila velmi neobvyklá zpráva. Na webové stránce nadcházejícího kongresu matematiků, který se měl konat následujícího roku v Berlíně, se objevilo oznámení, že svatý grál matematiky byl nalezen. Riemannova hypotéza byla dokázána. Následky takové zprávy by byly vskutku nedozírné. Riemannova hypotéza je ústředním problémem veškeré matematiky. Když si matematici četli toho dne elektronickou poštu, zažili mimořádné vzrušení při představě, že se možná dožili vyřešení jedné z největších matematických záhad všech dob.

Oznámení přišlo od Enrica Bombieriho. Těžko nalézt lepší a důvěryhodnější zdroj. Bombieri patřil po celou dobu ke stěžejním opatrovníkům Riemannovy hypotézy, a navíc byl profesorem v nesmírně prestižním Ústavu pokročilých studií v Princetonu, kde kdysi pracovali Einstein a Gödel. Většinou toho moc nenamluvil, nicméně matematici vždy velmi pečlivě naslouchali tomu, co říká.

Bombieri se narodil v Itálii, kde díky prosperujícím rodinným vinohradům získal všeobecně znamenitý vkus a cit pro to, co je v životě dobré. Kolegové jej láskyplně nazývají „matematickým aristokratem“. Během svého mládí patřil k nejstylovějším účastníkům evropských konferencí. Občas se objevil v nějakém parádním sporťáku. Sám velmi ochotně živil historky o tom, že kdysi skončil šestý v jistém čtyřiadvacetihodinovém italském automobilovém závodě. Jeho úspěchy na poli matematiky byly ovšem hmatatelnější a vedly

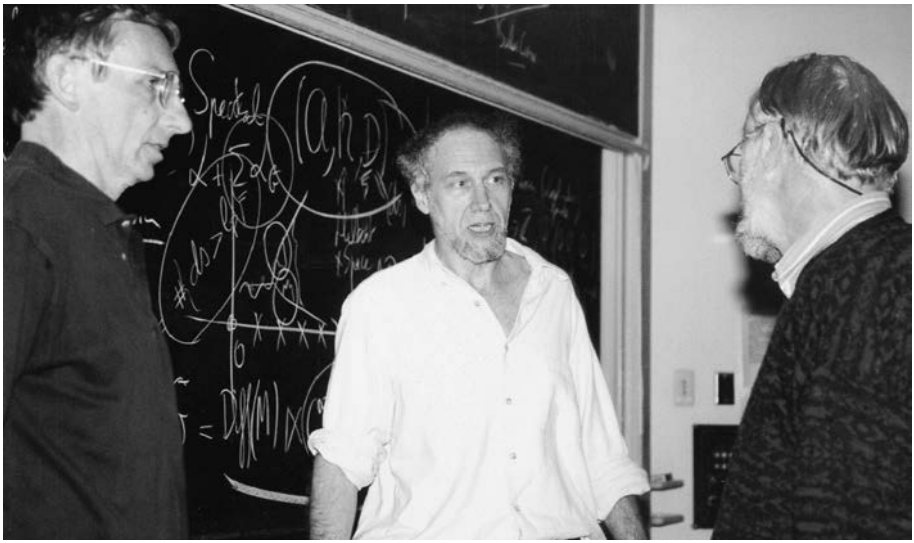
k tomu, že byl v roce 1970 pozván do Princetonu. Tam již od té doby zůstal. Svou vášeň pro rallye později vyměnil za malování, zejména portrétů.

Jeho hlavní oblastí zájmu je ale matematická umělecká tvořivost, a hlavně výzva skrývající se v Riemannově hypotéze. Riemannovou hypotézou byl Bombieri posedlý od svých patnácti let, kdy si o ní jakožto předčasně vyspělý mladík poprvé něco přečetl. Vlastnosti čísel jej fascinovaly odjakživa, už jako malý si o nich četl v matematických knihách, kterých jeho otec ekonom vlastnil úctyhodnou sbírku. Zjistil, že Riemannova hypotéza je považována za nejhlubší a nejdůležitější problém teorie čísel. Mladíkova vášeň pro problém ještě vzrostla, když mu za jeho případné vyřešení otec přislíbil Ferrari, což byl zoufalý pokus přimět syna, aby přestal huntovat jeho vlastní model.

Podle e-mailu se zdálo, že se Bombieri vytoužené odměny nedočká. „Přednášky Alaina Connese v Princetonu nabraly minulý týden fantastický směr," začal Bombieri svůj e-mail. Sedm let předtím rozrušila matematický svět zvěst, že Alain Connes obrátil svou pozornost k pokusu o zdolání Riemannovy hypotézy. Connes patřil k revolucionářům oboru. Je-li Bombieri Ludvíkem šestnáctým, pak Connes je bezesporu Robespierrem této oblasti matematiky. Je to kromobyčejně charismatický člověk, jehož výbušný styl se ani v nejmenším nepřibližuje vžité představě matematika coby jakéhosi neobratného suchara. Má zápal fanatika přesvědčeného o své vizi světa a jeho přednášky mají hypnotický účinek. Pro své následovníky je postavou téměř kultovních rozměrů. A ti jej půjdou velice ochotně bránit na barikády proti jakémukoli protiútoku starých struktur reprezentujících nějaký ten *ancien régime*.

Connes je zaměstnán v Institut des hautes études scientifiques v Paříži, což je jakási francouzská obdoba Princetonu. Hned od svého příchodu do této instituce v roce 1979 vytvořil zcela nový jazyk pro popis své vlastní novátorské vize geometrie. Je to matematik, který se nebojí dotáhnout předmět svého výzkumu až do té nejextrémnější formy abstrakce. Dokonce i většina matematiků uvyklých hluboce koncepčním přístupům jejich vlastního předmětu studia ke světu trochu ucukla před abstraktní revolucí, kterou Connes razil. Těm, kdo tvrdili, že tak drsné teorie není zapotřebí, nicméně ukázal, že jeho nový geometrický jazyk zahrnuje mnoho vodítek ke světu kvantové fyziky. Jestliže věc způsobí masové zděšení mezi matematiky, pak nechť se tak stane.

Connesova troufalá víra, že by jeho nová geometrie mohla poodhalit nejen roušku světa kvantové fyziky, ale dokonce snad i vysvětlit Riemannovu hypotézu, tedy největší číselnou záhadu všech dob, se setkala s překvapením,



Obr. 1: Alain Connes, profesor v Institut des hautes études scientifiques a na Collège de France.

a dokonce šokem. To, že si dovolil proniknout do hájemství teorie čísel a utkat se zde tváří v tvář s nejtěžším problémem matematiky, odráželo pro něj zcela typické ignorování veškerých myslitelných hranic. Hned od jeho příchodu na scénu v polovině 90. let 20. století panoval obecný názor, že jestli má někdo na to, aby tuto notoricky známou baštu dobyl, pak je to právě Alain Connes.

Ale tím, kdo měl najít poslední chybějící kousek mozaiky, nebyl Connes. Bombieri pokračoval, že jistý mladý fyzik sedící v obecenstvu na Connesově přednášce dostal zčistajasna nápad, jak využít svůj bizarní svět supersymetrických fermionicko-bosonických systémů ke zdolání Riemannovy hypotézy. Většina matematiků neměla tušení, co tato směsice nesmyslných výrazů znamená. Bombieri proto připojil vysvětlení, že tato slůvka popisují „fyziku týkající se skupiny částic zvaných anyony a morony s opačnými spiny za teploty blízké absolutní nule". To pořád ještě znělo dost šíleně, na druhé straně ale mělo jít o popis řešení nejtěžšího problému historie matematiky, takže málokdo by mohl očekávat jednoduchý výklad. Podle Bombieriho zmíněný mladý fyzik po šesti dnech nepřetržité usilovné práce s pomocí nového programovacího jazyka MISPAR nakonec nejtěžší matematický problém vyřešil.

Bombieri zakončil svůj e-mail zvoláním: „To je bomba! Prosím, šiřte tuto zprávu nejvíce, jak to půjde.“ Přestože to znělo zvláštně, že by měl zrovna nějaký mladý fyzik dokázat Riemannovu hypotézu, nebylo to zcela nemyslitelné. Během několika posledních desetiletí byla velká část matematiky hluboce provázána s fyzikou. Riemannova hypotéza je sice problém z teorie čísel, během posledních let ale několikrát vypluly na povrch jeho nečekané souvislosti s problémy částicové fyziky.

Mnozí matematici změnili své původně zamýšlené cestovní plány a místo toho vytáhli do Princetonu, aby byli u toho. Vzpomínka na vzrušení, které zavládlo před pár lety, když v červnu 1993 britský matematik Andrew Wiles během své přednášky v Cambridgi oznámil, že dokázal velkou Fermatovu větu, byla ještě čerstvá. Wiles prokázal, že se Fermat nemýlil, když tvrdil, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá celočíselná řešení, jestliže je číslo n větší než 2. Když na konci přednášky Wiles položil křídu, začaly létat zátky od šampaňského a fotoaparáty začaly blýskat.

Matematici ovšem dobře věděli, že případný důkaz Riemannovy hypotézy by měl pro budoucnost matematiky podstatně větší význam než potvrzení toho, že Fermatova rovnice nemá řešení. Jak Bombieri zjistil již v útlém věku patnácti let, Riemannova hypotéza míří k porozumění nejzákladnějším prvkům matematiky, tedy prvočíslům.

Prvočísla jsou jakýmisi atomy aritmetiky. Jsou to ta čísla, která nelze zapsat ve formě součinu dvou menších čísel. Čísla 13 nebo 17 jsou prvočísly, zatímco 15 nikoli, neboť je lze zapsat ve formě součinu 3×5. Prvočísla jsou klenoty rozeseté po nekonečném číselném vesmíru a matematici je vzývají po staletí. Pro matematiky představují něco jako div světa: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... – čísla pokračující bez konce, která existují kdesi v nějakém zvláštním světě mimo naši fyzickou realitu. Jsou cosi jako dar matky Přírody matematikům.

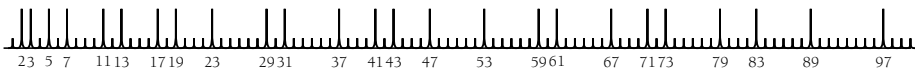
Jejich význam pro matematiku vyvěrá z toho, že jsou to stavební kameny, s jejichž pomocí je možné zkonstruovat všechna ostatní celá čísla. Každé číslo, které není prvočíslem, je možné získat pomocí vynásobení vhodných prvočíselných kamenů. Každou molekulu ve fyzickém světě je možné sestavit z atomů prvků periodické tabulky chemických prvků. Seznam prvočísel je takovou tabulkou pro matematiku. Prvočísla 2, 3 a 5 představují vodík, helium a lithium v matematikově laboratoři. Když matematik zvládne tyto základní kameny, dává mu to naději, že jednou objeví nové způsoby, jak vytyčit cestu skrz neprostupnou džungli matematického světa.

Navzdory jejich zdánlivé jednoduchosti a fundamentálnímu charakteru si prvočísla zároveň drží prestižní místo nejzáhadnějších objektů, jakými se kdy nějaký matematik zabýval. V matematice, tedy předmětu zasvěceném hledání řádu a schématům, představují prvočísla nejzákladnější výzvu. Letmý pohled na jejich seznam ukazuje, že je nemožné předpovědět, kdy se objeví to následující. Jejich výskyt se zdá být zcela náhodný a chaotický a nenabízí žádná vodítka, jak určit příští prvočíslo. Seznam prvočísel je tepem matematiky, jeho pulz je však řízen vpravdě silným kofeinovým koktejlem (obrázek 2).

Dokážeme nalézt nějaký magický vzorec nebo předpis, jenž by generoval čísla na tomto seznamu, nějaké kouzelné pravidlo, které by nám ukázalo, kde se nachází sté prvočíslo? Tato otázka posedla mysli matematiků všech věků. Navzdory námaze vynakládané nepřetržitě po více než dva tisíce let se zdá, že prvočísla stále vzdorují všem pokusům o zařazení do nějaké jasně definované struktury. Generace matematiků seděly a naslouchaly prvočíselnému bubínku, jenž vytleskával posloupnosti čísel: dva údery, pak tři, pět, sedm, jedenáct. Naslouchámе rytmu a stále více jsme přesvědčeni o tom, že se v jeho pozadí nenachází žádná vnitřní logika, jen jakýsi náhodný bílý šum. V samém srdci matematiky, předmětu zasvěceného hledání řádu, neslyší matematici nic jiného než chaotický hluk.

Matematici se ovšem nehodlají smířit s tím, že by se pro tento jev nenašlo nějaké vysvětlení. Prvočísla si vyvolila sama příroda. Kdyby v matematice neexistovala nějaká struktura, nějaké nádherné jednoduché schéma, pak by ji vůbec nestálo za to studovat. Naslouchání bílému šumu lze jen stěží považovat za obzvláště úžasnou zábavu. Matematik Henri Poincaré napsal: „Vědci nestudují přírodu proto, že je užitečná. Studují ji proto, že v ní shledávají potěšení. A potěšení v ní shledávají proto, že je nádherná. Kdyby příroda nebyla nádherná, nestála by za to, abychom ji poznávali. A kdyby příroda nestála za poznání, život by nestál za to, abychom jej žili."

Člověk by si mohl myslet, že se prvočíselný tep po nervózním začátku po nějaké době usadí. Avšak není tomu tak. Naopak, zdá se, že jak počítáme dál a dál, věci se zhoršují. Podívejme se na seznam prvočísel obsažených ve stov-



Obr. 2: Prvočísla v první stovce čísel – nepravidelný tep matematiky.

ce po sobě jdoucích přirozených čísel vlevo a vpravo od čísla 10 000 000. Nejprve vlevo, tedy pod hodnotou 10 000 000:

9 999 901, 9 999 907, 9 999 929, 9 999 931, 9 999 937,
9 999 943, 9 999 971, 9 999 973, 9 999 991.

Ve stovce ležící napravo od hodnoty 10 000 000 však najdeme pouze dvě:

10 000 019, 10 000 079.

Je opravdu těžké uhodnout vzorec, který by takové chování řídil. Uvedené procesí prvočísel mnohem více připomíná náhodný výběr než nějakou ukázněnou strukturu. Podobně jako nám znalost výsledků 99 hodů mincí nikterak nepomůže uhodnout, jak dopadne stý hod. Úplně stejně zdánlivě vzdorují jakémukoli předvídání i prvočísla.

Prvočísla představují pro matematiky stálý zdroj stresu a napětí, a to jeden z nejpozoruhodnějších svého druhu. Na jedné straně je jasné, že každé číslo je buď prvočíslem, nebo není. Pokud je číslo prvočíslem, žádným kouzlem nelze způsobit, aby se náhle stalo dělitelným nějakým menším číslem. Na druhé straně ale nelze popřít, že seznam prvočísel vypadá jako zcela náhodně vybraná posloupnost. Fyzikové se smířili s faktem, že o osudu vesmíru rozhoduje hod kvantovou kostkou, která při každém vrhu náhodně určí, kde mají vědci hledat hmotu. Ovšem představa, že nejzákladnější posloupnost čísel, na níž je postavena veškerá matematika, určuje příroda nějakým náhodným házením mincí, přece jen vzbuzuje jisté rozpaky. Náhoda a chaos jsou u matematiků v klatbě.

Navzdory svému náhodnému výskytu ale prvočísla vykazují jistou nadčasovost a univerzálnost, a to více než jakýkoli jiný objekt potulující se po matematické krajině. Prvočísla by zde byla bez ohledu na úroveň našeho vývoje, tedy i tehdy, kdybychom je nebyli schopni rozpoznat. Jak napsal cambridgeský matematik G. H. Hardy ve své knize *Obrana matematikova*, „číslo 317 je prvočíslem nikoli proto, že si to my myslíme, nebo snad proto, že naše mysl pracuje tím či oním způsobem, nýbrž proto, *že tomu tak je*, prostě proto, že taková je matematická realita“.

Někteří filozofové by se nad tímto platónským přístupem ke světu asi zamysleli a možná by bezmeznou víru v existenci nějaké reality mimo existenci lidskou i rozporovali, podle mne z nich ale právě tento fakt dělá filozofy, a nikoli matematiky. Existuje záznam fascinujícího dialogu mezi Alainem Connesem, tedy matematikem, o němž se zmiňuje Bombieriho

zpráva, a neurologem Jeanem-Pierrem Changeuxem v knize *Rozhovory o mysli, hmotě a matematice*. Napětí je v této knize přímo hmatatelné. Matematik hájí existenci matematiky mimo naši mysl, zatímco neurolog je pevně odhodlán jakoukoli podobnou ideu popřít. „Jak to tedy, že nevidíme zlatým písmem vyvedený nápis ‚π = 3,14159...' na obloze? Proč se neobjevuje výraz $6{,}02 \times 10^{23}$ v odrazu křišťálové koule?" Changeux vyjadřuje svou nezměrnou frustraci, když Connes trvá na svém, že „existuje, a to nezávisle na lidské mysli, ryzí a neměnná matematická realita" a že někde v srdci tohoto světa leží pevně daný soupis prvočísel. Matematika, praví Connes, „je bezesporu jediným vpravdě *univerzálním* jazykem". Na druhé straně vesmíru si lze snadno představit nějakou jinou chemii nebo biologii, ale prvočísla zůstanou prvočísly bez ohledu na to, ve které galaxii počítáme.

V klasickém románu *Kontakt* od Carla Sagana využívají mimozemšťané prvočísel jako technického prostředku k navázání kontaktu s živými bytostmi na Zemi. Hlavní hrdinka Ellie Arrowayová pracuje pro Organizaci pro vyhledávání mimozemských inteligentních tvorů a naslouchá přitom praskavým zvukům přicházejícím z vesmíru. Jedné noci, když jsou teleskopy zrovna namířeny směrem ke hvězdě Vega v souhvězdí Lyry, se na pozadí obvyklého šumu náhle ozve podivný tepající zvuk. Ellie okamžitě rozpozná, o jaký rytmus se jedná. Ozvou se dva údery, pak tři, pět, sedm, jedenáct a tak dále, přes všechna prvočísla až do 907. Pak vše začne nanovo.

Kosmický buben vyklepává hudbu, kterou pozemšťané nemohou nepoznat. Ellie je přesvědčena, že takový rytmus musela vyvolat nějaká inteligentní kultura. „Je těžké si představit, že by nějaká radioaktivní plazma vysílala tak pravidelné matematické signály. Prvočísla byla zvolena proto, aby upoutala naši pozornost." Kdyby mimozemská civilizace vysílala například posloupnost čísel vyhrávajících v nějaké mimozemské loterii, Ellie by je od šumu v pozadí nerozpoznala. Přestože soupis prvočísel působí skoro stejně náhodným dojmem jako čísla tažená v loterii, jejich charakter přesně určuje výběr každé jednotlivé položky v tomto mimozemském vysílání. A právě díky neměnnosti této struktury Ellie pozná, že mimo Zemi existuje také život.

Komunikace pomocí prvočísel ale není jen science fiction. Oliver Sacks ve své knize *Muž, který si pletl manželku s kloboukem* píše o šestadvacetiletých dvojčatech Johnovi a Michaelovi, jejichž nejintimnější konverzace se odehrávala na bázi šestimístných prvočísel. Sacks píše o tom, jak je poprvé nachytal, když si v rohu místnosti tajně sdělovali prvočísla: „Na první pohled vypadali jako nějací znalci vína při ochutnávce nějakého hodně vzácného druhu, kteří

si sdělují dojmy a všelijaká sofistikovaná hodnocení.“ Sacks dlouho nemohl přijít na to, o co dvojčatům vlastně jde. Jakmile ale prolomil jejich tajný kód, naučil se zpaměti nějaká osmimístná prvočísla a začal je kradmo vkládat do konverzace hned při příštím setkání. Dvojčata byla nejprve překvapena, pak překvapení přešlo v hluboké soustředění, a nakonec v jásot nad tím, že nalezla nové prvočíslo. Sacks si k hledání svých prvočísel vzal na pomoc prvočíselné tabulky, ale jak hledala svá prvočísla dvojčata, je naprostá záhada. Mohli snad tito autističtí učenci vlastnit nějakou tajnou formuli, která unikala generacím matematiků?

Příběh těchto dvojčat má Bombieri v obzvláštní oblibě.

> Když slyším tenhle příběh, nemohu se ubránit obrovské pokoře a úžasu nad tím, jak pracuje lidský mozek. Ale rád bych věděl, jestli mají moji matematičtí přátelé stejně pocity. Vidí snad také, jak bizarním, jak zázračným, ba dokonce snad mimo tento svět ležícím nevídaným talentem tato dvojčata tak přirozeně disponují? Jsou si vědomi toho, že se matematici po staletí usilovně snaží nalézt způsob, jak provádět to, co John a Michael dělají naprosto spontánně – tedy generovat a rozpoznávat prvočísla?

Dříve než mohl někdo přijít na to, jak to dělají, byla od sebe dvojčata oddělena ve věku třiceti sedmi let. Nařídili to jejich ošetřující lékaři, kteří došli k závěru, že jim jejich tajná numerologická řeč brání ve vývinu. Kdyby ti samí lékaři vyslechli některou z konverzací, jaké často slýcháme ve společenských místnostech kateder matematiky na světových univerzitách, asi by účastníky těchto diskusí nechali též internovat.

Dvojčata pravděpodobně používala k testování prvočíselnosti trik založený na takzvané malé Fermatově větě. Tento trik je podobný způsobu, jakým autističtí učenci rychle identifikují, že například třináctý duben roku 1922 bylo úterý, což je úkon, jenž bývá často předváděn v televizních pořadech. Oba triky jsou založeny na takzvané modulární neboli hodinové aritmetice. Ale i kdyby neměli žádnou zázračnou formuli pro generování prvočísel, i tak byla jejich dovednost naprosto mimořádná. Před svým odloučením se dostali až ke dvacetimístným číslům, hodně daleko za hranice Sacksových prvočíselných tabulek.

Podobně jako Saganova hrdinka naslouchající kosmickému prvočíselnému tepu nebo Sacks slídící za prvočíselně se domlouvajícími dvojčaty se také matematici po staletí namáhají, aby zaslechli v tomto šumu nějaký řád. Podobně jako když naslouchám východní hudbě západním sluchem a nic z toho, co slyším, nedává smysl. Pak ale přišlo 19. století a nastal zásadní

zlom. Bernhard Riemann se na problém podíval z úplně jiného úhlu. Ze své nové perspektivy začal náhle pozvolna odhalovat obrysy jisté struktury, která by mohla být odpovědná za prvočíselný chaos. V pozadí za povrchním šumem prvočísel se objevila nečekaná prchavá harmonie. Ač to byl obrovský krok kupředu, nová hudba i tak stále ukrývala mnohá svá tajemství mimo dosah lidského ucha. Riemann, jakýsi Wagner matematiky, se ovšem nehodlal nechat zdolat. O záhadné hudbě, kterou objevil, pronesl neslýchaně odvážné proroctví. Tato předpověď pak vešla ve známost jako takzvaná Riemannova hypotéza. Ten, kdo prokáže, že Riemannova intuice týkající se podstaty této hudby byla správná, zároveň nalezne vysvětlení toho, že se prvočísla vyznačují tak přesvědčivou zdánlivou nahodilostí.

Riemannův vhled do problému byl důsledkem jeho objevu jistého matematického zrcadla, skrz které na prvočísla nahlížel. Alenčin svět se změnil k nepoznání, když prolezla zrcadlem. Zato v podivuhodném světě za Riemannovým zrcadlem se zdálo, že se chaos kolem prvočísel přeměnil ve strukturu s nejlepším možným uspořádáním. Riemann vyslovil domněnku, že tento řád bude pokračovat neustále bez ohledu na to, jak daleko do nekonečného prostoru za zrcadlem se vydáme. Kdyby mu jeho předpověď vnitřní harmonie vzdálenější strany od zrcadla vyšla, přinesla by konečně vysvětlení toho, proč se chování prvočísel jeví navenek tak chaotické. Proměnu způsobenou Riemannovým zrcadlem, které mění chaos v řád, považuje většina matematiků za bezmála zázračnou. Riemann zanechal matematickému světu výzvu spočívající v ověření toho, že řád, který domněle objevil, tam skutečně je.

Bombieriho e-mail ze 7. dubna 1997 sliboval začátek nové éry. Možná, že nakonec Riemannova vize nebyla jen přeludem. Aristokrat matematiky nabídl kolegům úžasnou šanci na objasnění zdánlivého chaosu v chování prvočísel. Matematici by se neprodleně a s nadšením mohli dát do vykopávání mnoha dalších pokladů, k jejichž nalezení jim stačí pouze jeden krůček – vyřešení Riemannova velkého problému.

Případné vyřešení Riemannovy hypotézy by mělo nedozírné následky pro osudy mnoha dalších matematických otázek. Prvočísla jsou natolik stěžejní pro každého profesionálního matematika, že jakýkoli průlom v porozumění jejich podstatě by měl vskutku masivní účinek. Riemannově hypotéze se, jak se zdá, nelze vyhnout. Jak se tak matematici pohybují po záhybech matematické krajiny, vypadá to, že každá z cestiček nutně vede kolem alespoň jednoho místa, jež skýtá nějaký velkolepý výhled na Riemannovu hypotézu.

Riemannova hypotéza byla již mnohokrát přirovnávána k výstupu na Mount Everest. Čím déle zůstává hora nedobyta, tím větší je naše touha na ni vylézt. A matematik, který jednou zdolá Mount Riemann, bude rozhodně slavný déle než Edmund Hillary. Dobytí Everestu je považováno za úžasný výkon nikoli proto, že by vrchol byl nějakým nádherným místem vhodným pro výlet, ale právě pro onu výzvu, kterou výstup představuje. V tomto smyslu se Riemannova hypotéza od zdolávání nejvyšší hory světa podstatně liší. Vrchol Riemannovy hory je místem, kam by se každý z nás jednou velice rád podíval právě proto, že už víme, jaký je odtamtud výhled. Osoba, která jednou Riemannovu hypotézu dokáže, tím umožní zaplnění všech zatím existujících trhlin v důkazech tisíců dalších vět závisejících na její pravdivosti. Mnoho matematiků ve své práci nemělo jinou možnost, než předpokládat pravdivost Riemannovy hypotézy, aby splnili své vlastní cíle.

Právě proto, že na Riemannově výzvě závisí tolik dalších důležitých výsledků, ji matematici nazývají hypotézou, a nikoli domněnkou. Slovo „hypotéza" se svým významem mnohem více blíží nezbytnému předpokladu, který matematik musí učinit, aby mohl vybudovat nějakou teorii. Naproti tomu „domněnka" označuje prostě jen jistou informaci o tom, čemu matematici věří, že by snad mohlo platit. Mnozí se museli smířit s tím, že nejsou schopni Riemannovu záhadu rozlousknout, a přijali tedy toto proroctví za pracovní teorii. Pokud někdo přemění hypotézu ve větu, všechny tyto výsledky budou zpětně dokázány.

Když se matematici odvolávají na Riemannovu hypotézu, dávají tím svou reputaci všanc a sázejí na víru, že jednou snad někdo správnost Riemannovy intuice prokáže. Někteří z nich jdou ještě dále, než jen aby ji přijali za pracovní hypotézu. Bombieri považuje otázku, zda se prvočísla chovají podle Riemannovy předpovědi, za věc víry. Z hypotézy se stal doslova základní kámen honby za matematickou pravdou. Kdyby se ovšem ukázalo, že Riemannova hypotéza neplatí, pak bychom ztratili veškerou víru v naši intuitivní schopnost správně uhodnout, jak se věci mají. Už jsme se ve víře, že Riemann měl pravdu, dostali tak daleko, že jakákoli alternativa by nás přinutila k radikální revizi celého matematického světa. Zejména všechny výsledky, o nichž se domníváme, že leží za Riemannovým štítem, by se rozplynuly v obláčku kouře.

Nejdůležitější je však to, že ověřením Riemannovy hypotézy by matematici dostali k dispozici rychlou a efektivní proceduru, s jejíž pomocí by zaručeně dokázali nalézt nějaké řekněme třeba stociferné prvočíslo, nebo prvočíslo

o jakémkoli jiném počtu číslic dle libosti. Můžeme se samozřejmě zcela legitimně ptát: „A co má být?“ Pokud nejsme zrovna matematici, pak taková dovednost nevypadá na to, že by měla nějaký příliš velký význam pro náš život.

Nalézání stociferných prvočísel zní podobně nesmyslně jako počítání andělů na špičce jehly. Většina lidí sice uznává, že matematika je nezbytnou součástí konstrukce letadla nebo vývoje elektronických technologií, ale jen velmi málo z nich by očekávalo, že esoterický svět prvočísel bude mít nějaký dopad na jejich život. Vskutku, ještě ve 40. letech 20. století byl stejného názoru i G. H. Hardy: „Gauss i matematici menšího významu mohou nyní oprávněně plesat nad tím, že tu je konečně nějaká vědní disciplína [míněna teorie čísel], jejíž značná odlehlost od obyčejného lidského života by ji měla udržovat čistou a něžnou.“

Jenomže nedávný historický přelom přivedl prvočísla přímo do ústředí drsného a špinavého světa obchodu. Prvočísla už nebudou nikdy vykázána do matematických citadel. V roce 1970 přeměnili tři vědci – Ron Rivest, Adi Shamir a Leonard Adleman – výzkum prvočísel z nenucené hříčky provozované ve slonovinových věžích světa akademie v závažnou obchodní aplikaci. Pomocí jistého výsledku Pierra de Fermata ze 17. století nalezla tato trojice způsob, jak využít prvočísla k ochraně našich kreditních karet brázdících elektronická nákupní střediska globalizovaného tržiště. Když se nápad poprvé objevil v roce 1970, neměl nikdo ani potuchy, jak obrovský obrat bude jednou mít elektronické obchodování. Zato dnes by tento způsob obchodu bez prvočísel vůbec nemohl existovat. Pokaždé když zadáte nějakou objednávku na něčí webové stránce, využívá váš počítač ochranu vašich dat zajištěnou metodami závisejícími na existenci stociferných prvočísel. Systém je označován zkratkou RSA podle svých tří tvůrců. Zatím byl pro ochranu dat ve světě elektronického obchodu využit asi milion prvočísel.

Bezpečnost transakcí při jakémkoli obchodním podnikání na internetu tedy závisí na stociferných prvočíslech. Rostoucí role internetu nakonec vyústí v to, že každý z nás bude mít k sobě přiřazeno jednoznačně určené prvočíslo. Náhle se objevuje komerční zájem na výzkumu toho, jak by důkaz Riemannovy hypotézy mohl ovlivnit naše porozumění tomu, jak jsou prvočísla rozvrstvena napříč číselným vesmírem.

Zajímavé na tom je to, že ačkoli *sestrojení* tohoto kódu závisí na objevech, které učinil Pierre de Fermat před více než třemi sty lety, jeho *prolomení* závisí na problému, který neumíme vyřešit ani dnes. Bezpečnost systému

RSA je založena na naší neschopnosti zodpovědět základní otázky týkající se prvočísel. Matematici vědí o prvočíslech dost na to, aby mohli internetové kódy budovat, ale ne dost na to, aby je dokázali rozluštit. Rozumíme jedné části rovnice, ale nikoli té druhé. Čím více se nám ale podaří zbavit prvočísla záhad, tím méně bezpečnými se tyto kódy stanou. Tato čísla jsou klíči k zámkům, které chrání světová elektronická tajemství. A to je také důvod, proč společnosti jako AT&T a Hewlett-Packard vynakládají velké částky peněz na úsilí zaměřené k porozumění jemností chování prvočísel a Riemannově hypotéze. Objevy takto získané by mohly napomoci rozluštění prvočíselných kódů a všechny společnosti podnikající na internetu se pochopitelně chtějí dozvědět jako první, že jejich kódy přestaly být zabezpečeny. Toto je také hlavním důvodem, proč se obchod a teorie čísel staly takovými zvláštními spolunocležníky. Komerční i akademická sféra náhle společně hlídají ostřížím zrakem vše, co se odehrává na tabulích výzkumníků v čisté matematice.

Takže Bombieriho oznámení nevzrušilo zdaleka jen matematiky. Mohlo by snad vyřešení Riemannovy hypotézy způsobit nějaký kolaps elektronického obchodování? Americká Agentura národní bezpečnosti (NSA) vyslala promptně své agenty do Princetonu, aby zjistili, co a jak. Ale zatímco matematici i bezpečnostní agenti svorně mířili do New Jersey, povšimli si někteří lidé na Bombieriho zprávě čehosi podezřelého. Základní částice vskutku často bývají pojmenovány různými bláznivými názvy – gluony, kaskádové hyperony, půvabné mezony, kvarky (poslední z nich byl převzat z díla *Plačky nad Finneganem* od Jamese Joyce). Ale morony, tedy „blbony“? To snad ne! Bombieri má s nikým nesrovnatelnou pověst znalce všeho, co se kolem Riemannovy hypotézy kde šustne, ale ti, kdo jej znají osobně, jsou si též vědomi jeho rozpustilého smyslu pro humor.

O velké Fermatově větě se v rámci jistého aprílového šprýmu také kdysi psalo, že byla vyvrácena. Bylo to krátce poté, co Andrew Wiles nalezl chybu ve svém prvním důkazu, který předtím přednesl v Cambridgi. A Bombieriho e-mailem byla matematická komunita napálena znovu. Horlivá touha zažít znovu vzrušení, které zavládlo, když byla Fermatova věta dokázána, způsobila, že matematici bezelstně spolkli vnadidlo, které na ně Bombieri nastražil. A navíc se díky neustálému nadšenému přeposílání e-mailu z rychle se šířící zprávy vytratilo datum 1. dubna. Tento fakt, posílený navíc tím, že se e-mail dostal také do mnoha zemí, v nichž pojem aprílových žertíků není znám, způsobil, že šprým měl podstatně větší úspěch, než Bombieri původně zamýšlel. Nakonec se musel veřejně doznat k tomu, že šlo o žert. Jedenadvacáté



Obr. 3: Enrico Bombieri, profesor v Ústavu pokročilých studií v Princetonu.

století se přiblížilo a lidstvo pořád ještě tápalo v totální temnotě, pokud šlo o poznání nejzákladnějších čísel. Byla to prvočísla, která se smála naposledy.

Proč byli vlastně matematici tak lehkomyslní a Bombierimu uvěřili? Ne snad, že by se v matematice trofeje udělovaly zadarmo. Striktní důkazy, které matematici důsledně vyžadují, než nějaký výsledek uznají za platný, dalece přesahují cokoli, co je v jiných vědách považováno za úspěšné ověření. Sám Wiles se ostatně přesvědčil, když nalezl mezeru ve svém prvním důkazu Fermatovy věty, že sestavení 99 procent skládačky nestačí. Historie si bude pamatovat jen toho, kdo doplní ten poslední chybějící kousek. A ten může klidně setrvávat v úkrytu po mnoho let.

Hledání jakéhosi tajného zdroje, který napájí prvočísla, se táhlo přes dvě tisíciletí. Byla to právě touha po získání tohoto elixíru, která způsobila, že matematici ochotně skočili Bombierimu na jeho vějičku. Po mnoho let se mnozí z nich prostě příliš báli třeba se jen přiblížit k tomuto notoricky známému těžkému problému. Bylo však fascinující pozorovat, jak s blížícím se koncem tisíciletí více a více matematiků začalo mluvit o tom, že by se do problému pustili. Důkaz velké Fermatovy věty jen posílil představy, že i velké problémy jsou řešitelné.

Matematici si užívali pozornosti, které se jim dočasně dostávalo poté, co Andrew Wiles dokázal velkou Fermatovu větu. Tento pocit pak také nepochybně přispěl k náchylnosti uvěřit Bombierimu. Andrew Wiles začal náhle dostávat nabídky na předvádění kalhot na módních přehlídkách pro Gap. Byl to skvělý pocit. Být matematikem bylo téměř sexy. Matematici tráví většinu svého času ve světě, který je naplňuje vzrušením a radostí. Je to ale nicméně radost, o kterou se mohou jen velice zřídka podělit se zbytkem světa. A tady se znenadání nabízela příležitost trochu se předvést a pochlubit se poklady, které na svých dlouhých osamělých poutích odhalili.

Důkaz Riemannovy hypotézy by byl perfektním vyvrcholením 20. století. Na jeho počátku tu byl Hilbert a jeho přímá výzva matematikům, aby s touhle záhadou konečně pohnuli. Riemannova hypotéza jako jediný z třiadvaceti otevřených problémů uvedených na Hilbertově seznamu přečkala celé století bez úhony.

Dne 24. května roku 2000 se v rámci uctění stého výročí Hilbertova slavného vystoupení sešli matematici a zástupci tisku na Collège de France v Paříži, aby si zde vyslechli čerstvou sadu problémů jakožto výzvu matematické komunitě pro nové milénium. Problémy byly představeny skupinou nejlepších světových matematiků včetně Andrewa Wilese a Alaina Connese. Problémů bylo sedm. Všechny byly nové až na jeden, který se nacházel už na Hilbertově seznamu – na Riemannovu hypotézu. V souladu s kapitalistickými ideály, které utvářely 20. století, dostaly tyto problémy novou příchuť. Riemannova hypotéza a dalších šest problémů byly totiž osazeny cenovkou s částkou jeden milion amerických dolarů. Celkem slušná motivace pro Bombieriho údajného mladého fyzika, kdyby mu snad sláva nestačila.

Autorem nápadu na stanovení cen za vyřešení problémů milénia byl bostonský obchodník Landon T. Clay, který své peníze vydělal díky směnám vzájemných fondů na aktivitou hýřící burze. Navzdory tomu, že kdysi odešel ze studií matematiky na Harvardu, si zachoval pro tuto vědu vášeň, navíc tak silnou, že se o ni chtěl podělit. Bylo mu samozřejmě jasné, že peníze nejsou pro matematiky tou správnou motivační silou. „To, co pohání matematiky, je touha po pravdě, je to reakce na krásu, sílu a eleganci matematiky." Na druhé straně ale Clay není naivní a jako podnikatel si dovede představit, že by mohl milion dolarů inspirovat nějakého nového Andrewa Wilese, aby se zapojil do honby za řešením některého z těchto úchvatných otevřených problémů. Není divu, že webové stránky Clayova matematického ústavu, na nichž bylo vypsání cen uvedeno, byly natolik



Obr. 4: Collège de France.

ochromeny nečekaným zájmem hned následujícího dne, že se pod tímto náporem zhroutily.

Sedm problémů milénia se svým charakterem liší od třiadvaceti problémů, které byly představeny o století dříve. Hilbert matematikům určil pro 20. století zcela novou agendu. Mnohé z jeho problémů byly původní a vybízely k nalezení podstatně nových úhlů pohledu na příslušný předmět. Spíše než aby obracely pozornost ke konkrétním problémům, jakými byla například velká Fermatova věta, přiměly Hilbertovy problémy matematiky k nové koncepci myšlení. Hilbert nabídl matematikům příležitost proletět se v balonu vysoko nad jejich vlastní disciplínou, a poznat tak lépe pod nimi se vinoucí krajinu. Tento nový přístup za mnohé vděčí právě Riemannovi, který o padesát let dříve zahájil svůj revoluční přesun matematiky ze světa vzorečků a rovnic do hájemství myšlenek a abstraktních teorií.

Volba sedmi problémů pro nové tisíciletí byla konzervativnější. V matematické galerii sehrály podobnou roli jako Turnerovy obrazy v malířství, zatímco Hilbertovy otázky představovaly spíše modernistickou avantgardní kolekci. Konzervatismus nové sady problémů byl částečně způsoben tím, že se od jejich případných řešení očekávala také srozumitelnost postačující k tomu, aby za ně mohl být jejich autorům bez pochybností vysázen zmíněný milion dolarů. Problémy milénia jsou otázky, o nichž matematici dobře vědí po několik desetiletí, v případě Riemannovy hypotézy dokonce více než jedno století. Je to výběr vpravdě klasický.

Clayových sedm milionů dolarů není první částka, která byla kdy vypsána za vyřešení nějakého matematického problému. V roce 1997 si Andrew Wiles vyzvedl 75 tisíc německých marek za svůj důkaz velké Fermatovy věty, a to díky ceně, kterou v roce 1908 vypsal Paul Wolfskehl. Příběh Wolfskehlovy ceny obrátil Wilesovu pozornost k Fermatovi v nevídaném věku deseti let.

Clay věřil tomu, že kdyby se mu podařilo vyvolat podobný efekt pro Riemannovu hypotézu, pak by jeho milion dolarů byl správně investován. Později vypsala dvě nakladatelství (Faber&Faber ve Velké Británii a Bloomsbury v USA) cenu jednoho milionu dolarů za důkaz Goldbachovy domněnky, aby se zviditelnila u příležitosti vydání románu Apostolose Doxiadise *Uncle Petros and Goldbach's Conjecture* (Strýček Petros a Goldbachova domněnka). Kdo by si chtěl tyto peníze vysloužit, musel by nejdříve vysvětlit, proč (a zda) se dá každé sudé číslo kromě dvojky napsat ve tvaru součtu dvou prvočísel. Nakladatelé ale kandidátům nedopřáli k vyřešení problému moc času. Řešení muselo být odevzdáno do 15. března 2002 a z nějakého bizarního důvodu se o cenu mohli ucházet pouze občané Velké Británie a USA.

Clay zastává názor, že se matematikům za jejich tvrdou dřinu nedostává patřičného uznání ani adekvátní materiální odměny. Kupříkladu Nobelova cena se za matematiku neuděluje. Namísto ní se za nejprestižnější ocenění v matematickém světě považuje Fieldsova medaile. Na rozdíl od Nobelovy ceny, která se obvykle uděluje vědcům na konci jejich kariéry za úspěchy, jichž dosáhli dávno předtím, Fieldsovu medaili může obdržet pouze matematik, který ještě nedosáhl čtyřicítky. Důvodem není obecně přijatá víra, že matematici často vědecky vyhoří v raném věku. John Fields, který s tímto nápadem přišel a poskytl pro udělování ceny potřebné prostředky, chtěl, aby cena vybudila ty nejslibnější matematiky k úsilí o dosažení ještě mnohem zásadnějších výsledků. Medaile se udělují každé čtyři roky u příležitosti konání Mezinárodního matematického kongresu. Poprvé byly uděleny v Oslu v roce 1936.

Věkový limit je velmi přísně dodržován. Například navzdory Wilesovu mimořádnému úspěchu, jakým nepochybně jeho důkaz velké Fermatovy věty byl, mu Fieldsův výbor nemohl udělit medaili, neboť nejbližší příležitost k udělení poté, co byl důkaz uznán jako platný, nastala až na kongresu v Berlíně, který se konal v roce 1998, a Wiles se narodil v roce 1953. Udělili mu tedy alespoň jinou, speciální medaili, aby byl jeho výkon alespoň nějak oceněn, bohužel ale tento fakt nelze srovnat s členstvím v exkluzivním klubu držitelů Fieldsových medailí. V tomto klubu nalezneme řadu klíčových hráčů našeho dramatu – jsou zde například Enrico Bombieri, Alain Connes, Atle Selberg, Paul Cohen, Alexandre Grothendieck, Alan Baker a Pierre Deligne.

Avšak důvodem, proč matematici aspirují na tyto medaile, nejsou peníze. Na rozdíl od obrovské hromady zlaťáků, která provází Nobelovu cenu, je Fieldsova medaile spojena s ušmudlanými patnácti tisíci kanadských dolarů.

Takže Clayovy miliony by v soutěži s finančním průvanem kolem Nobelových cen mohly pomoci. Na rozdíl od Fieldsových medailí či ceny od Fabera a Bloomsburyho za důkaz Goldbachovy domněnky jsou Clayovy peníze k dispozici pro každého bez ohledu na jeho věk nebo národnost a také bez časového omezení na vypracování řešení, až snad na tikající hodinky inflace.

Avšak hlavní motivací pro matematika pronásledujícího některý z problémů milénia není finanční odměna, nýbrž opojná vidina nesmrtelnosti, kterou matematika skýtá. Řešení některého z Clayových problémů nám sice může vynést zmíněný milion dolarů, což ale neznamená vůbec nic ve srovnání s tím, že naše jméno bude navždy vyryto do intelektuální mapy naší civilizace. Objevy jako Riemannova hypotéza, velká Fermatova věta, Goldbachova domněnka, Hilbertův prostor, Ramanujanova funkce tau, Eukleidův algoritmus, Hardyova-Littlewoodova kruhová metoda, Fourierova řada, Gödelovo číslování, Siegelův kořen, Selbergův vzorec pro stopy, Eratosthenovo síto, Mersennovo prvočíslo, Eulerův součin nebo Gaussova celá čísla beze zbytku vynesly nesmrtelnost těm matematikům, kteří tyto poklady v rámci našeho zkoumání prvočísel vynesli na zemský povrch. Tato jména budou živá ještě dlouho poté, co budou zapomenuti Aischylos, Goethe nebo Shakespeare. Jak kdysi řekl G. H. Hardy: „Jazyky umírají, ale matematické myšlenky nikoli. Nesmrtelnost je nejspíš pošetilý výraz, ale ať už znamená cokoli, největší šanci k jejímu dosažení má nejspíše matematik."

Ti matematici, kteří dlouho a tvrdě dřeli na epické pouti za porozuměním prvočíslům, představují více než jen jména vyrytá do matematické skály. Zvraty a zákruty lemující historii prvočísel byly výsledkem skutečných životů barvité nabídky žijících postav dramatu. Historické osobnosti z dob Velké francouzské revoluce a Napoleonovi přátelé postupně uvolňují svá místa kouzelníkům moderní doby a mágům internetu. Vášeň pro prvočísla svedla dohromady životní příběhy indického úředníka, francouzského špiona, který o vlásek unikl popravě, a maďarského Žida prchajícího před hrozící perzekucí ze strany nacistického Německa. Všechny tyto postavy utvářely nové unikátní perspektivy pro své úsilí, aby byla jejich jména zapsána do matematické listiny hrdinů. Prvočísla spojila matematiky napříč mnoha národy a zeměmi. Čína, Francie, Řecko, Spojené státy americké, Norsko, Austrálie, Rusko, Indie a Německo představují jen pár příkladů zemí, které se staly prominentními členy nomádského kmene matematiků. Každé čtyři roky se scházejí na mezinárodním kongresu, aby zde vyprávěli kolegům o svých poutích.

Matematiky ale nežene kupředu jen touha zanechat svůj otisk v historii. Stejně jako si troufl Hilbert pohledět do neznámé budoucnosti, předznamenal by i důkaz Riemannovy hypotézy novou éru. Když se po vyhlášení Clayových cen Wiles obrátil na zástupce médií při tiskové konferenci, dával si záležet na tom, aby patřičně zdůraznil, že cenami osazené problémy neznamenají konec cesty:

> Tam někde venku se nachází celý nový matematický svět a jen čeká, až jej někdo objeví. Představte si třeba, co prožívali Evropané kolem roku 1600. Věděli, že na opačné straně Atlantiku leží Nový svět. Jak by asi vypadaly ceny, které by vypsali za objevení a popis Spojených států? Asi by to nebyly ceny za objev letadla, za sestrojení počítače, za založení Chicaga, nebo za objev kombajnu sklízejícího lány pšenice. Všechny tyto věci se staly částí Ameriky, ale nikdo si je v roce 1600 nedokázal představit. Pokud by tehdy někdo takové ceny vypsal, pak čistě jen za vyřešení problému překonání zeměpisné délky.

Riemannova hypotéza je zeměpisnou délkou matematiky. Důkaz Riemannovy hypotézy by znamenal vyhlídku na brázdění stříbropěnných vod nekonečného oceánu čísel. Byl by to ale jen začátek našeho chápání nejzákladnějších čísel matky Přírody. Pokud se nám podaří odhalit tajemství, jak řídit prvočísla, kdo ví, co ještě dalšího tam někde leží a čeká na své odhalení?

KAPITOLA DRUHÁ

ATOMY ARITMETIKY

„Občas, když se věci jeví jako příliš složité, je dobré se na chvíli zastavit a zahloubat nad tím, zda jsme si položili správnou otázku.“

Enrico Bombieri, *Teritorium prvočísel*, The Sciences

Dvě století předtím, než Bombieriho aprílový e-mail napálil matematický svět, ohlásil v Palermu jiný Ital, Giuseppe Piazzi, podobně vzrušující zprávu. Piazzi ve své observatoři zpozoroval novou planetu obíhající Slunce po dráze nacházející se někde mezi oběžnými drahami Marsu a Jupiteru. Planeta byla pojmenována Ceres. Byla sice o mnoho menší než sedm v té době známých planet, ale její objev 1. ledna 1801 byl všemi chápán jako významné osudové znamení pro rozvoj vědy v nadcházejícím století.

Nadšení se změnilo v zoufalství o pár týdnů později, když se malá planeta ztratila z dohledu. Stalo se tak poté, co ji její oběžná dráha zavedla na odvrácenou stranu Slunce, kde se její vetché světélko utopilo ve sluneční záři. Najednou byla pryč, ztracena kdesi na noční obloze, znovu schována mezi myriádami hvězd. V 19. století ještě astronomové neměli k dispozici matematické prostředky pro výpočet její dráhy z krátkého úseku, na němž ji měli možnost pozorovat během prvních týdnů nového století. Zdálo se, že ji ztratili z dohledu nadobro, a nikdo nebyl schopen předpovědět, zda a kde se znovu objeví.

Nicméně necelý rok po zmizení Piazziho planety prohlásil čtyřiadvacetiletý Němec z Brunšviku, že ví, kde by měli astronomové ztracené těleso hledat. Protože žádná lepší rada nebyla po ruce, obrátili znalci své teleskopy k místu, na které jim mladík ukázal. A hle, planeta zde jakoby působením nějakého kouzla skutečně byla. Tato bezprecedentní astronomická predikce ale nebyla dílem nějaké astrologické magie. Dráhu Ceresu vypočítal matematik, který si všiml určitých schémat tam, kde ostatní viděli jen malý objekt s nepředvídatelným chováním. Carl Friedrich Gauss vyšel z minimálního objemu dat, která byla o pohybu planety zaznamenána, a aplikoval na ně svou

novou metodu pro přibližné určení místa, kde se asi bude Ceres nacházet v libovolném budoucím okamžiku.

Určení dráhy Ceresu udělalo z Gausse přes noc hvězdu vědecké komunity. Jeho výkon byl symbolem prorocké síly matematiky v rašící vědecké éře počátku 19. století. Zatímco astronomové objevili planetu náhodou, byl to matematik, kdo vnesl do hry nezbytné analytické dovednosti, s jejichž pomocí bylo možné vysvětlit, co se bude dít dále.

Ačkoli Gaussovo jméno astronomickému bratrstvu zatím nic neříkalo, v matematickém světě se zapsal již předtím jako impozantní nová osobnost. Vcelku správně načrtl dráhu Ceresu, ale jeho hlavní vášeň se týkala hledání struktur ve světě čísel. Pro Gausse představoval číselný vesmír zásadní výzvu. Úkolem bylo nalézt řád a strukturu tam, kde ostatní viděli jen chaos. „Fenomenální dítě“ nebo „matematický génius“ jsou příklady titulů, kterými lidé hýří příliš často, ale asi málokterý matematik by mohl něco namítnout proti tomu, aby těmito nálepkami byl označen Gauss. Čistě jen počet nových



Obr. 5: Carl Friedrich Gauss (1777–1855).

nápadů a objevů, o něž se zasloužil, ještě než dosáhl věku pětadvaceti let, se vymyká jakémukoli vysvětlení.

Gauss se narodil v rodině dělníka v Brunšviku v Německu v roce 1777. Už ve třech letech opravoval svému otci aritmetické výpočty. V sedmnácti ho jeho vlastní objev nádherné geometrické konstrukce sedmnáctiúhelníka přesvědčil, že by měl zasvětit svůj život matematice. Před Gaussem znali Řekové způsob, jak pomocí kružítka a pravítka sestrojit pravidelný pětiúhelník. Od té doby se nikomu nepodařilo vymyslet způsob, jak se stejným klasickým nářadím sestrojit jiný pravidelný mnohoúhelník s prvočíselným počtem stran větším než pět. Vzrušení, jaké Gauss zažil v souvislosti se svou konstrukcí pravidelného sedmnáctiúhelníka, jej přimělo k tomu, že si začal vést deníky. Tento zvyk mu vydržel po následujících osmnáct let. Deník, který v rukou rodiny zůstal až do roku 1898, se později stal jedním z nejdůležitějších dokumentů historie matematiky, v neposlední řadě proto, že potvrzuje, že Gauss sice dokázal, ale nepublikoval mnoho výsledků, které pak museli matematici dokazovat znovu v pokročilém stadiu 19. století a později.

Jeden z největších raných Gaussových objevů byl vynález hodinové kalkulačky. Šlo samozřejmě jen o myšlenku, nikoli o fyzický stroj. Tato myšlenka otevřela možnost zabývat se aritmetikou čísel, která byla až dosud považována za příliš velká. Hodinová kalkulačka pracuje na stejném principu jako klasické hodiny. Ukazuje-li váš chronometr, že je právě 9 hodin, pak se po dalších čtyřech hodinách přesune malá ručička na jedničku. Gaussova kalkulačka tedy vydá odpověď 1 místo 13. Chce-li Gauss vykonat nějaký složitější výpočet, například 7×7, pak na hodinové kalkulačce vyjde zbytek po dělení čísla $49 = 7 \times 7$ dvanácti. Takže výsledek bude zase 1 hodina.

Síla a rychlost hodinové kalkulačky se začne projevovat v okamžiku, kdy se Gauss rozhodne vypočítat hodnotu $7 \times 7 \times 7$. Místo násobení čísla 49 sedmi Gaussovi stačí vynásobit sedmi pouze poslední výsledek (tedy číslo 1), a dostane výsledek 7. Aniž by tedy bylo nutno počítat $7 \times 7 \times 7$ (což náhodou dává 343), Gauss snadno a téměř bez námahy pozná, že toto číslo dává zbytek 7 při dělení dvanácti. Mocné možnosti kalkulačky se projevily naplno tehdy, když Gauss začal zkoumat obrovská čísla, která ležela mimo jeho výpočetní obzor. Ačkoli neměl potuchy, kolik je 7^{99}, jeho hodinový kalkulátor mu sdělil, že toto číslo dává zbytek 7 při dělení dvanácti.

Gauss si povšiml, že na hodinách s ciferníkem obsahujícím právě dvanáct položek není nic osobitého. Přišel s nápadem, aby se hodinová aritmetika (někdy nazývaná též modulární aritmetikou) prováděla s libovolným po-

čtem hodin na ciferníku. Takže zadáme-li například číslo 11 do hodinové kalkulačky rozdělené do čtyř hodin, obdržíme výsledek 3, protože 11 dává zbytek 3 při dělení čtyřmi. Gaussův objev této nové aritmetiky vnesl revoluci do matematiky přelomu 19. století. Podobně jako objev teleskopu umožnil astronomům, aby se podívali na zcela nové světy, pomohla myšlenka hodinové kalkulačky matematikům k odhalení nových struktur v číselném vesmíru, které byly předchozím generacím skryty. Dokonce ještě dnes je Gaussova metoda ústřední součástí internetové bezpečnosti, přičemž jsou využívány ciferníky, jejichž počet hodin převyšuje počet atomů v námi pozorovatelném vesmíru.

Gauss jakožto dítě z chudé rodiny měl velké štěstí, že mu bylo umožněno, aby svůj matematický talent zpeněžil. Narodil se do doby, v níž byla matematika stále ještě považována za privilegovanou činnost, byla štědře finančně podporována šlechtickými dvory a nejrůznějšími mecenáši a navíc praktikována nadanými amatéry, jakým byl například Pierre de Fermat, v jejich volném čase. Gaussovým mecenášem se stal vévoda z Brunšviku jménem Carl Wilhelm Ferdinand. Ferdinandova rodina vždy ve svém vévodství svědomitě podporovala rozvoj vědy a kultury. Jeho otec například založil Collegium Carolinum, jednu z nejstarších technických univerzit v Německu. Ferdinand plně sdílel étos svého otce a hluboce věřil tomu, že vzdělání bylo základem komerčního úspěchu Brunšviku. Proto byl neustále na stráži a vyhledával talenty, které by zasloužily podporu. Ferdinand se s Gaussem poprvé setkal v roce 1791 a byl jeho schopnostmi natolik ohromen, že mu okamžitě nabídl finanční obnos dostatečně velký k tomu, aby se Gauss mohl zapsat na Collegium Carolinum, kde by mohl svůj nepochybný potenciál rozvíjet.

Gauss věnoval svou první knihu v roce 1801 vévodovi s hlubokými díky. Tato kniha, *Disquisitiones Arithmeticæ*, byla sbírkou mnoha Gaussových objevů o vlastnostech čísel, které si zapisoval do svých deníčků. Všeobecně se má za to, že tato kniha stála u zrodu teorie čísel jakožto samostatné vědní disciplíny, a nikoli jen jakési nesourodé směsice nejrůznějších pozorování o číslech. Její publikování mělo na svědomí to, že se z teorie čísel stala, jak Gauss rád říkával, „královna matematiky“. Pro Gausse byla korunovačními klenoty prvočísla, tedy čísla, která odjakživa fascinovala a trápila generace matematiků.

Prvním nesmělým náznakem toho, že si je lidstvo vědomo speciálních kvalit prvočísel, je kost datující se asi do roku 6500 př. n. l. Je známa pod názvem „kost z Ishanga“ a byla odhalena v roce 1960 v horách střední

rovníkové Afriky. Jsou na ní vyryty tři sloupce obsahující čtyři skupiny vrypů. V prvním sloupci jich postupně nalezneme 11, 13, 17 a 19, což je soupis všech prvočísel mezi desítkou a dvacítkou. Také ostatní sloupce působí dojmem, že se za nimi skrývá nějaké matematické pozadí. Není známo, zda tato kost, která je uložena v Královském muzeu přírodních věd v Bruselu, opravdu reprezentuje první pokusy našich předků o porozumění prvočíslům, nebo zda jsou zářezy jen jakousi náhodnou sbírkou čísel, která prostě jsou prvočísly. Každopádně by tato pravěká kost mohla být záhadným a svůdným svědkem prvního nájezdu lidstva na teritorium prvočísel.

Jedna názorová škola tvrdí, že prvními lidmi, kteří zaslechli zvuk prvočíselných tamtamů, byli Číňané. Ti přisuzovali ženské charakteristiky sudým číslům a mužské vlastnosti číslům lichým. Kromě tohoto přímočarého dělení považovali lichá čísla, která nejsou prvočísly (například 15), za čísla zženštilá. Existují záznamy vypovídající o tom, že kolem roku 1000 př. n. l. Číňané vyvinuli velice fyzický způsob porozumění tomu, co činí prvočísla tak zvláštními mezi ostatními čísly. Máme-li patnáct fazolí, pak je můžeme uspořádat do úhledného obdélníkového houfu tvořeného třemi řadami po pěti fazolích. Máme-li jich ale sedmnáct, pak máme jedinou možnost, jak z nich udělat obdélník, a to o jedné řadě obsahující všech sedmnáct fazolí. Pro Číňany představovala prvočísla chlapácká čísla, která se nechtějí dát rozložit na součin menších čísel.

Staří Řekové také s oblibou přičítali prvočíslům všelijaké sexuální vlastnosti, byli to však právě oni, kdo kolem 4. století př. n. l. objevili skutečné možnosti prvočísel jakožto základních stavebních bloků pro všechna čísla. Přišli na to, že každé číslo je možné zapsat ve tvaru součinu prvočísel. Zatímco se Řekové mylně domnívali, že oheň, vzduch, voda a země jsou stavebními bloky veškeré hmoty, atomy aritmetiky určili naprosto dokonale. Po mnoho let vyvíjeli chemici značné úsilí ve snaze identifikovat základní složky svého oboru, a byla to právě intuice starých Řeků, která nakonec kulminovala v periodické tabulce Dmitrije Mendělejeva, která vyčerpávajícím způsobem popisuje veškeré chemické prvky. Avšak aritmetice řecký náskok v identifikaci stavebních kamenů aritmetiky nepomohl. Matematici se zatím stále zmítají ve snaze porozumět své vlastní tabulce prvotních čísel.

Knihovník velkolepé řecké výzkumné instituce v Alexandrii byl prvním člověkem na planetě, o němž je doloženo, že vytvořil tabulku prvočísel. Jako nějaký starověký Mendělejev odhalil Eratosthenes ve 3. století poměrně bezbolestnou metodu, jak určit prvočísla mezi prvními řekněme tisíci čísly.

Nejprve vypsal všechna čísla od jedné do tisíce. Potom zakroužkoval první prvočíslo, tedy dvojku, a vyškrtal ze svého seznamu každé druhé číslo. Z těchto čísel nemohlo být ani jedno prvočíslem, protože byla všechna dělitelná dvojkou. Pak se podíval na nejbližší číslo, které nebylo vyškrtnuto, což byla trojka. Potom vyškrtal každé třetí číslo za trojkou. Ta byla všechna dělitelná třemi, takže opět nebyla prvočísly. Pokračoval v tomto duchu dále, vždy nalezl nejbližší dosud nevyškrtnuté číslo a pak vyškrtal všechna čísla tímto novým prvočíslem dělitelná. Touto systematickou metodou vytvořil tabulku prvočísel. Jeho metoda byla později nazvána *Eratosthenovým sítem*. Každé nové prvočíslo vytváří „síto", které Eratosthenes využil k eliminaci dalších jím dělitelných složených čísel. Rozměr síta se mění s každým krokem, ale v okamžiku, kdy dojde k tisícovce, musí být všechna čísla, která prošla všemi síty, prvočísly.

Když byl Gauss malý chlapec, dostal dárek – knížku obsahující seznam prvních několika tisíc prvočísel. Tato tabulka byla pravděpodobně vytvořena pomocí podobných prastarých sít. Gaussovi se zdálo, že se prvočísla objevují prostě jen tak náhodně. Jeho předpověď dráhy Ceresu byla sama o sobě dost náročná. Ovšem výzva předložená prvočísly měla více společného s téměř neřešitelnou úlohou analyzovat rotaci těles, jakým byl například Hyperion, jeden z měsíců Saturnu, který má podobný tvar jako hamburger. Na rozdíl od našeho Měsíce má Hyperion dost daleko do gravitační stability a rotuje zcela nepředvídatelně. Ačkoli je otáčení Hyperionu a některých asteroidů chaotické, alespoň je známo, že jejich pohyb je vyvoláván gravitačními silami Slunce a planet. Avšak pokud jde o prvočísla, nikdo nemá sebemenší potuchy, čím je jejich výskyt řízen a jaká síla je vláčí sem a tam. Při studování tabulky prvočísel nenalezl Gauss žádné pravidlo, podle kterého by poznal, jak daleko je třeba poskočit, abychom se dostali k dalšímu prvočíslu. Mají se snad matematici smířit s tím, že prvočísla jsou dětmi matky Přírody a podobně jako hvězdy na noční obloze jsou náhodně rozeseta bez ladu a skladu? Takový postoj nebyl pro Gausse přijatelný. Primární náplní matematikovy práce je hledání schémat, odhalování a vysvětlování zákonů, podle kterých funguje příroda, a předpovídání, co nás čeká v budoucnosti.

HONBA ZA STRUKTURAMI

Souboj matematiků s prvočísly krásně ilustruje jedna úloha, se kterou se každý z nás musel ve škole alespoň jednou setkat. Je dán seznam prvních několika členů nějaké posloupnosti čísel a naším úkolem je do tohoto nedokončeného seznamu doplnit číslo, které bude následovat. Posuďme tři příklady takových zadání:

1, 3, 6, 10, 15, ...
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...
1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, 30, ...

Matematicky orientovanou osobu při střetu s takovými seznamy okamžitě napadnou tisíce nejrůznějších otázek. Podle jakých pravidel posloupnost vznikla? Dokážeme předpovědět, jaký bude její další člen? Nalezneme vzorec, který by nám poskytl informaci o stém členu takové posloupnosti, aniž bychom předtím byli nuceni vypočítat prvních 99 členů?

První výše uvedená posloupnost obsahuje takzvaná *trojúhelníková čísla*. Desáté číslo na tomto seznamu je počet fazolí potřebných k vytvoření trojúhelníka s deseti řádky, přičemž na prvním řádku leží jedna fazole, na druhém dvě, na třetím tři a tak dále, až konečně na desátém řádku nalezneme deset fazolí. Takže N-té trojúhelníkové číslo dostaneme prostým sečtením prvních N přirozených čísel: $1 + 2 + 3 + ... + N$. Hledáme-li sté trojúhelníkové číslo, lze použít dlouhou a pracnou metodu sestávající v tom, že postupně posčítáme prvních sto čísel.

Takhle nějak uvažoval Gaussův učitel, který tuto úlohu s oblibou žákům zadával, protože studentům obvykle práce na problému zabrala dost času na to, aby si mohl zatím v klidu dát dvacet. Student, který byl s úlohou hotov, měl za úkol přinést svou břidlicovou tabulku s výsledkem a položit ji na katedru. Zatímco ostatní studenti teprve začínali pracně počítat, desetiletý Gauss svou tabulku donesl během několika vteřin. Učitel se nad Gaussovou drzostí spravedlivě rozkatil. Když se ale podíval na Gaussovu tabulku, spatřil výsledek 5 050 a žádné kroky výpočtu. Učitel usoudil, že Gauss musel nějakým způsobem podvádět. Žáček mu však vysvětlil, že k výpočtu stého čísla na seznamu stačí dosadit $N = 100$ do vzorce $(N + 1) \times N/2$, aniž by bylo nutno počítat ostatní čísla, která na seznamu předcházejí číslu 100.

Místo toho, aby se bezhlavě pustil do výpočtu, uvažoval Gauss v širších souvislostech. Přišel na to, že nejlepší způsob, jak zjistit, kolik fazolí se cel-