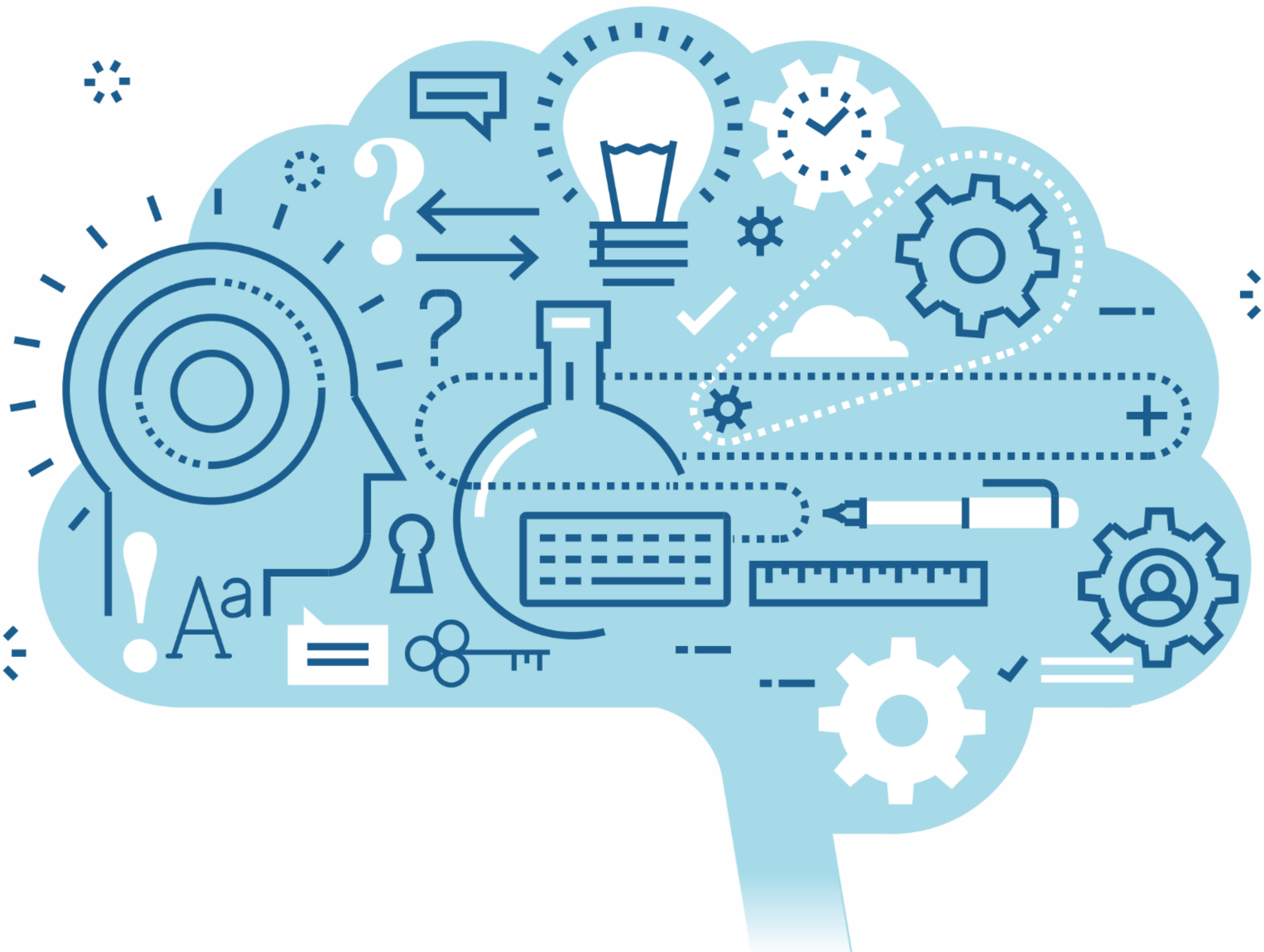

WORLD SCIENCE – 2019

Proceedings of articles the V International Scientific Practical Conference
Czech Republic, Karlovy Vary- Russia, Moscow, May 29-30, 2019

WORLD SCIENCE – 2019

Proceedings of articles the V International Scientific Practical Conference

Czech Republic, Karlovy Vary- Russia, Moscow, May 29-30, 2019

Czech Republic, Karlovy Vary - Russia, Kirov, 2019

UDC 001
BBK 72
N 76

Scientific editor

Mamonova Yelena Borisovna, Ph.D., Associate Professor, Nizhny Novgorod State Pedagogical University named after Kozma Minin (Minin University)

Reviewer

Serkhacheva Natal'ya Sergeyevna, Ph.D., Associate Professor, MIREA - Russian Technological University

N 76 World Science – 2019: Proceedings of articles the V International Scientific Practical Conference. Czech Republic, Karlovy Vary- Russia, Moscow, May 29-30, 2019 [Electronic resource] / Editors as. prof. Ye. B. Mamonova. – Electron. txt. d. (1 file 2,4 MB). – Czech Republic, Karlovy Vary: Skleněný Můstek – Russia, Kirov: MCNIP, 2019. - ISBN 978-80-7534-225-6+ ISBN 978-5-00090-151-9.

Proceedings includes materials of the international scientific conference « World Science – 2019», held in Czech Republic, Karlovy Vary-Russia, Moscow, May 29-30, 2019. The main objective of the conference - the development community of scholars and practitioners in various fields of science. Conference was attended by scientists and experts from Azerbaijan, Belarus, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Russia, Uzbekistan.

ISBN 978-80-7534-225-6 (Skleněný Můstek, Karlovy Vary, Czech Republic)
ISBN 978-5-00090-151-9 (MCNIP LLC, Kirov, Russian Federation)

TABLE OF CONTENTS

Section 1. Physics and Mathematics

О ЧЕБЫШЕВСКИХ КЛИНЬЯХ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

Федоров В.М.

Россия, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Аннотация. В статье изучаются вопросы существования и единственности наилучшего приближения клином конечной размерности и конечной коразмерности в нормированном пространстве. Основным результатом является доказательство необходимых и достаточных условий для того, чтобы клин $K \subset C(X)$ являлся чебышевским, т.е. обладал свойствами существования и единственности. Доказанные ниже теоремы обобщают хорошо известные результаты Хаара [1], Колмогорова [2], Зингера [3,4], Фелпса [5,6], Гаркави [7,8,9], полученные ими для действительных подпространств конечной размерности и конечной коразмерности.

Ключевые слова: чебывшевский клин, полярный клин, опорный функционал, мера, размерность клина, коразмерность клина, хаусдорфовый компакт.

Abstract. The article studies the problems of existence and uniqueness of the best approximation by a wedge of finite dimension and finite codimension in a normed space. The main result is the proof of the necessary and sufficient conditions for the wedge K⊂C (X) to be Chebyshev, that is, possessed properties of existence and uniqueness. The theorems proved below generalize the well-known results of Haar [1], Kolmogorov [2], Singer [3,4], Phelps [5,6], Garkavi [7,8,9], which they obtained for real subspaces of finite dimension and finite codimension.

Введение

Пусть E обозначает нормированное пространство над полем действительных или комплексных чисел $\mathbb{F}$. Непустое подмножество $K \subset E$ называется *клином*, если $x + y, tx \in K$ при всех $x, y \in K$ и $t \geq 0$. Клин называется *конусом*, если $K\cap(-K) = 0$. Пусть $K^\circ \doteqdot \{\alpha \in E^* \mid \operatorname{Re} \alpha(x) \leq 0,\ x \in K\}$ обозначает *полярный* клин* в сопряженном пространстве E^*. Если клин K является подпространством $L \subset E$ над полем $\mathbb{R}$, то его *аннулятор** $L^\perp \doteqdot \{\alpha \in E^* \mid \operatorname{Re} \alpha(x) = 0, x \in K\} = L^\circ$. Обозначим через $S \doteqdot \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$

замкнутый единичный шар в E и через $\Xi(\alpha) \doteqdot \{x \in S | \alpha(x) = \|\alpha\|\}$ – *экстремальное множество* функционала $\alpha \in E^*$. Функционал $\alpha \in E^*$ называется *опорным,* если множество $\Xi(\alpha) \neq \emptyset$ не пусто.

Пусть далее $K \subset E$ обозначает замкнутый клин в банаховом пространстве E. Обозначим через $\hat{E} \doteqdot E/K$ факторпространство смежных классов $\hat{x} = x - K$ в пространстве E и через $\rho(x, K) \doteqdot \|\hat{x}\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ величину расстояния от точки x до K, которую обычно называют наилучшим приближением клином K. Клин $K \subset E$ называется *чебышевским*, если для любого $x \in E$ множество $P_K(x) \doteqdot \{y \in \mathrm{K} \mid \|x - y\| = \|\hat{x}\|\}$ состоит ровно из одной точки.

Далее обозначим через $\nabla_p K \doteqdot \mathrm{cone}(K - p)$ *опорный клин* в точке $p \in K$, т.е. коническую оболочку множества $K - p$; обозначим через $\Pi_p K \doteqdot \nabla_p K \cap (-\nabla_p K)$ *опорная плоскость* в точке $p \in K$, т.е. наибольшее действительное линейное подпространство, содержащееся в опорном клине $\nabla_p K$; и, наконец, обозначаем через $\nabla_p^\circ K \doteqdot (\nabla_p K)^\circ$ *полярный* клин* опорного клина $\nabla_p \mathrm{K}$ в точке $p \in K$.

Основные результаты

Вначале мы рассмотрим необходимые и достаточные условия единственности наилучшего приближения клином в нормированном пространстве E.

Лемма 1. *Замкнутый клин $K \subset E$ в нормированном пространстве E тогда только тогда обладает свойством единственности наилучшего приближения, когда для любой точки $p \in K$ и для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ пересечение $\big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K = 0$ равно нулю.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и $\|\alpha\| = 1$. Допустим, что множество $\Xi(\alpha)$ имеет две различные точки $x, y \in \Xi(\alpha)$, т.ч. $u = x - y \in \Pi_p K$. В силу его выпуклости $x - tu \in \Xi(\alpha)$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Поэтому $\|x - tu\| = 1$ и $\|x - u\| \geq \mathrm{Re}\, \alpha(x - u) = \mathrm{Re}\, \alpha(x) - \mathrm{Re}\, \alpha(u) \geq \mathrm{Re}\, \alpha(x) = 1$ при всех $u \in \nabla_p K$, т.е. норма $\|x - tu\| = \rho\big(x, \nabla_p K\big) = 1$ равна расстоянию от точки x до клина $\nabla_p K$. Отсюда мы имеем равенство $\|(x+p)-(p+tu)\| = \rho(x+p,K) = 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Поскольку $p+tu \in K$ при достаточно малых t > 0, то клин K не обладает свойством единственности наилучшего приближения.

Достаточность. Если клин не обладает свойством единственности, то в силу выпуклости существуют $x \in E$, $p \in K$ и $u \in \nabla_p K \setminus 0$, т.ч. при всех $-1 \leq t \leq 1$ получим $\|x-(p+tu)\| = \rho(x,K) = 1$, где $p+tu \in K$. Так как $\Pi_p K$ образует крайнее множество клина $\nabla_p K$, то $u \in \Pi_p K$. Полагая $y_t = x - p - tu$, мы имеем $\|y_0\| = \rho\left(y_0, \nabla_p K\right) = \rho(x,K) = 1$. По теореме отделимости выпуклых множеств [13, с. 42] существует $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. $\alpha(y_0) = \|\alpha\| = 1$. Поскольку $\Xi(\alpha)$ является крайним множеством шара S, то $y_t \in \Xi(\alpha)$ при всех $-1 \leq t \leq 1$. Следовательно, $u \in \left(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\right) \cap \Pi_p K$, что противоречит нашему предположению.

Лемма 2. *Если клин $K \subset E$ конечной размерности $\dim_{\mathbb{R}} K = m$ не является чебышевским, тогда существуют точка $p \in K$, ненулевой вектор $u \in \Pi_p K$ и линейно независимая система $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \operatorname{ex} S^*$ крайних точек единичного шара $S^* \subset E^*$, т.ч. $n \leq m$ и выполняются следующие условия:*

имеют место равенства $\alpha_k(u) = 0, k = 1, \cdots, n$;

найдутся такие числа $c_k > 0$, что $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k \in \nabla_p^\circ K$.

Доказательство. Так как по условию клин K не является чебышевским, то в силу выпуклости существуют элемент $x \in E$, точка $p \in K$ и ненулевой вектор $u \in \Pi_p K$, т.ч. $\|x-(p+tu)\| = \rho(x,K) = 1$ при всех $-1 \leq t \leq 1$. Обозначим далее через $M \doteqdot \operatorname{sp}\{y, \nabla_p K\}$ линейную оболочку вектора $y = x - p$ и клина $\nabla_p K$. Применяя теорему отделимости к единичному шару $S(y)$ пространства M с центром в точке y и к клину $\nabla_p K$, мы получим функционал $\beta \in M^*$, т.ч. $\beta \in \nabla_p^\circ K$ и $\beta(y) = \|\beta\| = 1$. Тогда функционал β принадлежит крайнему подмножеству $\Xi^*(y) \doteqdot \Xi\left(\delta_y\right)$ границы единичного шара в пространстве M^*. Поскольку $\Xi^*(y)$ является выпуклой оболочкой своих крайних точек, то найдутся такие крайние точки $\beta_1, \cdots, \beta_n$, что $\beta(v) = \sum_{k=1}^n c_k \beta_k(v)$ при $v \in M$, где $\sum_{k=1}^n c_k = 1$, $c_k > 0$, $k = 1, \cdots, n$. Так как

$\|\beta_k\| = 1$, $k = 1, \cdots, n$, и $\beta(u) = 0$, то при всех $-1 \le t \le 1$ имеем $1 = \beta(y) = \mathrm{Re}\, \beta(y + tu) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{Re}\, \beta_k(y + tu) \le \sum_{k=1}^{n} c_k \|y + tu\| = 1.$

Следовательно, $\mathrm{Re}\beta_k(y + tu) = 1$ при всех $-1 \le t \le 1$ и $k = 1, \cdots, n$. Поэтому $\beta_k(y) = 1$ и $\beta_k(u) = 0$ при $k = 1, \cdots, n$. Поскольку аннулятор вектора u в M^* является m-мерным подпространством пространством, то можно считать, что функционалы $\beta_1, \cdots, \beta_n$ линейно независимы и $n \le m$.

Обозначим через B_k совокупность всех продолжений функционала β_k из подпространства *M* на все пространство *E* с сохранением его нормы. Тогда B_k образует выпуклое и слабо* замкнутые подмножество границы шара $S^* \subset E^*$ и значит имеет крайнюю точку $\alpha_k \in \mathrm{ex}\, B_k$. Так как β_k является крайней точкой шара в M^* , то B_k является крайним подмножеством границы шара *S**. Поэтому $\alpha_k \in \mathrm{ex}(S^*)$, $k = 1, \cdots, n$, будут крайними точками шара *S**. Кроме того, они линейно независимы и, значит, удовлетворяют всем условиям леммы.

Теорема 1. *Замкнутый клин K ⊆ E конечной коразмерности обладает свойством единственности наилучшего приближения тогда и только тогда, когда при всех* $p \in K$ *и ненулевых опорных функционалах* $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ *выполняется неравенство* $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) < n_p$ *и любая линейно независимая система крайних точек множества* $\Xi(\alpha)$ *линейно не зависит от* $\Pi_p K$*, где* $n_p = \mathrm{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_p K$*.*

Доказательство. *Необходимость*. Предположим, что имеет место неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) \ge n_p$ для некоторого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$. Мы можем считать, что функционал удовлетворояет условию $\|\alpha\| = 1$. Рассмотрим подпространство $M \subset \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}\{\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\}$ размерности $\dim_{\mathbb{R}} M = n_p$. Поскольку размерность M равна коразмерности $\Pi_p K$ и оба они лежат в гиперплоскости $\mathrm{Re}\alpha(x) = 0$, то пересечение $M \cap \Pi_p K \ne 0$ не равно нулю, что противоречит лемме 3. Таким образом, доказано неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) < n_p$.

Пусть $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) = n$. Рассмотрим линейно независимую систему крайних точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ множества $\Xi(\alpha)$ и предположим, что она линейно зависит от $\Pi_p K$. Поскольку $\alpha(e_k) = 1$ и $\Pi_p K \subset \mathrm{Reker}(\alpha)$, то существуют такие числа

$c_k \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, что $x = \sum_{k=1}^{n+1} c_k e_k \in \Pi_p K$ и $\mathrm{Re}\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k = 0$. Разбивая эту сумму на две, соответствующие положительным и отрицательным числам c_k, мы получим $x = \sum_{c_k>0} c_k e_k + \sum_{c_k<0} c_k e_k = c(y-z)$, где $c = \sum_{c_k>0} c_k$ и $y, z \in \Xi(\alpha)$. Отсюда вытекает, что $x/c = y - z \in (\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K$. Это невозможно по лемме 1. Таким образом, необходимость утверждения доказана.

Достаточность. Если конус K не обладает свойством единственности, то в силу леммы 1 имеем $\left(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\right) \cap \Pi_p K \neq 0$ для некоторых $p \in K$ и $\alpha \in \nabla_p^{\circ} K$. Поэтому существуют такие $y, z \in \Xi(\alpha)$, что $x/c = y - z \in \Pi_p K$ и $x \neq 0$. Пусть $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) = n$, тогда вектор x является линейной комбинацией $n+1$ линейно независимых крайних точек множества $\Xi(\alpha)$. Следовательно, эти крайние точки линейно зависят от $\Pi_p K$ и мы получили противоречие.

Рассмотрим пространство $C(X)$ непрерывных функций со значениями в поле $\mathbb{F}$, определенных на компактном хаусдорфовом пространстве X с равномерной нормой $\|f\| \doteqdot \sup_{x\in X} |f(x)|$. Для каждого функционала $\alpha \in C^*(X)$ по теореме Рисса-Маркова существует такая единственная регулярная борелевская мера ν на компакте X со значениями в поле $\mathbb{F}$, для которой функционал представляется в виде интеграла $\alpha(f) = \int_X f d\nu$ при всех $f \in C(X)$ и норма $\|\alpha\| = |\nu|(X)$, где $|\nu|$ обозначает вариацию меры ν [10, с. 288].

Пусть $\nu = (\nu_1 - \nu_2) + i(\nu_3 - \nu_4)$ жорданово разложение [10, с. 113] меры ν, где ν_k, $k = 1, 2, 3, 4$, неотрицательные регулярные борелевские меры. Меры ν_k являются абсолютно непрерывными относительно меры $\lambda \doteqdot \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$. По теореме Радона–Никодима [10, с. 194] существуют борелевские функции, $\rho_k \in L^1(X, \lambda)$ т.ч. $d\nu_k = \rho_k d\lambda$. Тогда функция $\rho \doteqdot |(\rho_1 - \rho_2) + i(\rho_3 - \rho_4)|$ почти всюду (μ) положительна на X, а функция $\phi \doteqdot (\rho_1 - \rho_2)/\rho + i(\rho_3 - \rho_4)/\rho$ имеет модуль $|\phi| = 1$ почти всюду (μ). Функция ϕ называется *аргументом* меры ν, а неотрицательная регулярная борелевская мера $d\mu = \rho d\lambda$ называется *модулем* меры ν. Выражение меры в виде $d\nu \doteqdot \phi d\mu$ называется *полярным разложением* представляющей меры функционала $\alpha \in C^*(X)$ с нормой $\|\alpha\| = \mu(X)$.

Лемма 3. *Ненулевой функционал $\alpha \in C^*(X)$ тогда и только тогда является опорным, когда аргумент $\phi \doteqdot arg(\alpha)$ его представляющей меры $d\nu \doteqdot \phi d\mu$ совпадает почти всюду (μ) с непрерывной функцией на компакте X.*

Доказательство. Если аргумент $\phi \doteqdot \arg(\alpha)$ почти всюду равен непрерывной функцией $g \in C(X)$, то $\alpha(\bar{g}) = \mu(X) = \|\alpha\|$, т.е функционал является опорным. Обратно, если $\alpha(\bar{g}) = \|\alpha\|$, где функция $g \in C(\mathrm{X})$ удовлетворяет условию $|g(x)| \leq 1$, то $\int_X \bar{g}\varphi \, d\mu = \int_X \mathrm{Re}(\bar{g}\varphi) \, d\mu = \mu(\mathrm{X})$. Отсюда $\mathrm{Re}\big(\bar{g}(x)\varphi(x)\big) = 1$ п.в. на T. Так как $|\varphi(x)| = 1$, то получаем $g(x) = \varphi(x)$ почти всюду на компакте X.

Определение. Пусть клин $K \subset C(X)$ замкнут и точка $p \in K$. Обозначим через $\mathrm{zero}(f) \doteqdot \{x \in X | \, f(x) = 0\}$ множество всех нулей функции $f \in C(X)$.

Будем говорить, что ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ *имеет полярные нули*, если найдется такая ненулевая линейная комбинация $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{x_k}$ функционалов Дирака δ_{x_k}, где $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathrm{zero}(u)$ и $c_k \in \mathbb{F}$, что $\alpha \in \nabla_p^\circ K$.

В случае, когда клин K является подпространством $L \subset C(X)$ размерности $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, то его опорные клинья и опорные плоскости совпадают с L, а все полярные* конусы совпадают с аннулятором $L^{\perp}$. Докажем, что функционалы Дирака $\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}$, где $x_1, \cdots, x_n$ различные точки компакта X, линейно зависят от аннулятора $L^{\perp}$, тогда и только тогда, когда в подпространстве L существует ненулевая функция $v \in L$, имеющая *n* нулей $v(x_k) = 0, k = 1, \cdots, n$.

Пусть $M \doteqdot \mathrm{sp}\{\delta_{x_k}\}_{k=1}^{n}$ линейная оболочка в сопряженном пространстве $C^*(X)$. Функционалы $\delta_{x_1}, \cdots, \delta_{x_n}$ линейно зависят от подпространства $L^{\perp}$ в том и только в том случае, когда найдется ненулевая линейная комбинация $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{x_k}$, где $c_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\alpha \in L^{\perp}$, т.е. справедливо неравенство $M \cap L^{\perp} \neq 0$. Так как M и L имеют размерность n, то это равносильно тому, что $M_{\perp} \cap L \neq 0$. Для того чтобы выполнялось последнее условие, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая ненулевая функция $v \in L$, для которой $\delta_{x_k}(v) = v(x_k) = 0, k = 1, \cdots, n$.

Таким образом, если $L \subset C(X)$ подпространство размерности $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, то некоторая ненулевая функция из L имеет полярные нули тогда и только тогда, когда L содержит ненулевую функцию, имеющую не менее, чем *n* нулей.

Теорема 2. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ конечной размерности является чебышевским тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in K$ каждая ненулевая функция из опорной плоскости $\Pi_p K$ не имеет полярных нулей.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что существует точка $p \in K$ и ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ имеющая полярные нули. Тогда по определению существует ненулевой функционал вида $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{x_k}$, где $\{x_k\}_{k=1}^{n} \in \mathrm{zero}(u)$ и $c_k \in \mathbb{F}$, принадлежащий $\alpha \in \nabla_p^{\circ} K$ и имеющий норму $\|\alpha\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k| = 1$. При этом действительная часть $\mathrm{Re}\,\alpha$ аннулирует опорную плоскость $\overline{\Pi_p K}$.

Применяя теорему Урысона [10, с. 26], построим функцию $h \in C(X)$ с нормой $\|h\| = 1$, т.ч. $h(x_k) \doteqdot \mathrm{sign}\, c_k$, где $\mathrm{sign\, a} = a/|a|$, если $a \neq 0$, и $\mathrm{sign}\, a = 0$, если $a = 0$, обозначает знак числа a. Ясно, что $\alpha(\bar{h}) = \|\alpha\| = 1$. Определим функцию $f \in C(X)$ по формуле $f(x) \doteqdot p(x) + \overline{h(x)}(1 - |u(x)|)$. Тогда будут выполняться равенства $\|f - p\| = 1$ и $f(x_k) - p(x_k) = \overline{\mathrm{sign}\, c_k}$ при всех $k = 1, \cdots, n$. Так как $|f(x) - p(x) - tu(x)| \leq |h(x)|(1 - |u(x)|) + t|u(x)| \leq 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$ и $x \in X$, то имеет место равенство $\|f - p - tu\| = 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$.

С другой стороны, для каждой функции $v \in \nabla_p K$ выполняется неравенство $\|f - p - v\| \geq \mathrm{Re}\, \alpha(f - p - v) \geq \mathrm{Re}\, \alpha(f - p) = \mathrm{Re}\, \alpha(h) = 1$. Отсюда получаем $\|x - p - tu\| = \rho(x, K) = 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Таким образом, элементы вида tu при $0 \leq t \leq 1$ являются наилучшим приближением функции *f* – *p* опорным клином $\nabla_p K$. Следовательно, при достаточно малых $t > 0$ элементы $p + tu \in K$ будут наилучшим приближением для функции f.

Достаточность. Если конус K не является чебышевским в пространстве $C(X)$, то в силу леммы 2 существуют такие точка $p \in K$, ненулевая функция

$u \in \Pi_p K$ и линейно независимая система $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \operatorname{ex} S^*$ крайних точек единичного шара $\mathrm{S}^* \subset C^*(X)$, что $\mathrm{n} \leq \mathrm{m}$ и выполняются следующие условия:

(a)имеют место равенства $\alpha_k(u) = 0, k = 1, \cdots, n$;

(b)найдутся такие числа $c_k > 0$, что $\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_k \in \nabla_p^\circ K$.

Как известно, каждая крайняя точка единичного шара $\mathrm{S}^* \subset C^*(X)$ с точностью до множителя, по модулю равного единице, является функционалом Дирака δ_x [10, с. 478]. Следовательно, в силу условия (a) существуют такие точки $x_k \in X$ что $u(x_k) = 0, k = 1, \cdots, n$. Кроме того, в силу условия (b) некоторая ненулевая линейная комбинация функционалов Дирака $\alpha = \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k \in \nabla_p^\circ K$, где $b_k \in \mathbb{F}$. Таким образом, мы получили систему полярных нулей некоторой ненулевой функции $u \in \Pi_p K$, что невозможно по условию.

Теорема 2 имеет достаточно общий характер. Например, из нее легко можно вывести теоремы Хаара [1, p. 311] и Колмогорова [2, с. 300]. В части условия единственности теорема 8 распространяется на конусы бесконечной размерности в виде теоремы 3, т.к. если ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ имеет полярные нули, то существует ненулевой функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, для которого $\operatorname{supp}(\alpha) \subset \operatorname{zero}(u)$. В случае, когда клин является подпространством в $C(X)$, то теорему 3 в другой формулировке доказал Зингер [3, p. 165], а затем доказал Фелпс [6, p. 649].

Теорема 3. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ тогда и только тогда не обладает свойством единственности наилучшего приближения, когда существуют точка $p \in K$, ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и некоторая ненулевая функция $u \in \Pi_p K$, для которых имеет место включение $\operatorname{supp}(\alpha) \subset \operatorname{zero}(u)$.*

Доказательство. *Необходимость*. Если клин $K \subset C(X)$ не обладает свойством единственности, то по лемме 1 существуют точка $p \in K$ и ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. пересечение $\big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K = 0$ равно нулю. Обозначая через $d\nu \doteqdot \phi d\mu$ представляющую меру функционала α, мы можем считать, что норма $\|\alpha\| = \mu(X)$=1. Поэтому существуют две различные функции $f_1, f_2 \in \Xi(\alpha)$, т.ч. будет выполняться включение $u = (f_1 - f_2)/2 \in \Pi_p K$. В силу выпуклости множества $\Xi(\alpha)$ получим $f = (f_1 + f_2)/2 \in \Xi(\alpha)$. Следовательно, мы имеем $\alpha(f) = \int_X f\phi d\mu = \mu(X) = 1$, $\alpha(f+u) = \int_X (f+u)\phi d\mu = \mu(X) = 1$. Так как $\|f\| = \|f+u\| = 1$, то равенство $f(x)\phi(x) = (f(x) + u(x))\phi(x) = 1$ выполняется (μ) почти всюду. Отсюда следует, что $f(x) = f(x) + u(x) = \overline{\phi(x)}$ и поэтому функция $u(x) = 0$ равна нулю (μ) почти всюду на компакте X. Поскольку функция $u \in C(X)$ непрерывна, то $u(x) = 0$ при всех $x \in \operatorname{supp}(\alpha)$. Таким образом, мы имеем включение $\operatorname{supp}(\alpha) \subset \operatorname{zero}(u)$.

Достаточность. Рассмотрим ~~не~~нулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^{\circ} K$ и ненулевую функцию $u \in \Pi_p K$, т.ч. $\operatorname{supp}(\alpha) \subset \operatorname{zero}(u)$. Мы можем считать, что нормы $\|\alpha\| = \|u\| = 1$. Пусть $d\nu \doteqdot \phi d\mu$ представляющая мера функционала α. Поскольку данный функционал α является опорным, то по лемме 6 аргумент ϕ его представляющей меры совпадает (μ) почти всюду с непрерывной функцией $g \in C(X)$, у которой норма $\|g\| = 1$. Рассмотрим непрерывную функцию вида $f(x) = \overline{g(x)}(1 - |u(x)|)$. Тогда $f(x) = \overline{g(x)} = \overline{\phi(x)}$ (μ) почти всюду. Кроме того, имеем $|f(x)| \leq 1 - |u(x)| \leq 1$ и $|f(x) + u(x)| \leq 1 - |u(x)| + |u(x)| = 1$ при всех $x \in X$. Поэтому $\|f\| = \|f + u\| = 1$. Так как $u(x) = 0$ на носителе α, то $\alpha(f+u) = \alpha(f) = \alpha(\bar{g}) = \mu(X) = 1$, т.е. $f, f+u \in \Xi(\alpha)$. Следовательно, ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ принадлежит пересечению $\big(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\big) \cap \Pi_p K$. Таким образом, по лемме 1 клин K не обладает свойством единственности.

Рассмотрим свойства клиньев $K \subset C(X)$ конечной коразмерности, которые обладают свойством единственности наилучшего приближения. Обозначим через $n_p \doteqdot \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_p K$ коразмерность опорной плоскости $\Pi_p K$. Далее мы будем обозначать через m_p число $n_p - 1$ в действительном случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и целую часть числа $n_p - 1)/2$ в комплексном случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Как обычно, характеристическая функция множества $A \subset X$ обозначается через χ_A.

Теорема 4. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ конечной коразмерности обладает свойством единственности наилучшего приближения тогда и только* *тогда, когда для всякой точки $p \in K$ и для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^{\circ} K$ выполняются следующие условия:*

(a) *множество* $\mathrm{zero}(\alpha) = X \backslash \mathrm{supp}(\alpha)$ *имеет не более, чем* m_p *точек;*

(b) *система функций* $\{\chi_x | x \in \mathrm{zero}(\alpha)\}$ *линейно не зависит от* $\Pi_p K$ *над полем* $\mathbb{F}$*.*

Доказательство. Пусть $p \in K$ и функционал $\alpha \in \nabla_p^{\circ} K$. В силу теоремы 3 клин *K* обладает свойством единственности в том и только в том случае, когда выполняется неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) < n_p$ и система крайних точек множества $\Xi(\alpha)$ линейно не зависит от $\Pi_p K$. Поскольку для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^{\circ} K$ с нормой $\|\alpha\| = 1$ и для всех $f \in \Xi(\alpha)$ имеют место соотношения $\alpha(f) = \int_X f d\nu = \int_X f \phi d\mu = \mu(X) = 1$, где $d\nu \doteqdot \phi d\mu$ обозначает представляющую меру α, то функция f совпадает с сопряженным аргументом $\bar{\phi}$ (μ) почти всюду на компакте X. Следовательно, функцию $\bar{\phi}$ можно считать непрерывной на носителе $\mathrm{supp}(\alpha)$ и равной нулю на множестве $\mathrm{zero}(\alpha)$.

Обозначим через k_α количество точек множества $\mathrm{zero}(\alpha)$. Крайними точками множества $\Xi(\alpha)$ являются функции $\bar{\phi} + \sum_{x \in \mathrm{zero}(\alpha)} \varepsilon_x \chi_x$, где $|\varepsilon_x| = 1$, а само множество $\Xi(\alpha)$ совпадает с выпуклой оболочкой указанных функций. Его размерность равна числу k_α в действительном случае и числу $2k_\alpha$ в комплексном случае. Отсюда количество точек $k_\alpha \leq m_p$. Так как функция $\bar{\phi}$ удовлетворяет условию $\alpha(\bar{\phi}) = 1$ и $\mathrm{Re}(\alpha) \in \Pi_p^{\perp} K$, то независимость системы крайних точек множества $\Xi(\alpha)$ от подпространства $\Pi_p K$ равносильна независимости системы функций $\{\chi_x | x \in \mathrm{zero}(\alpha)\}$ от $\Pi_p K$ над полем $\mathbb{F}$. Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.

Определение. Пусть $d\nu_1 = \phi_1 d\mu_1$ и $d\nu_2 = \phi_2 d\mu_2$ задают представляющие меры для функционалов $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*(X)$. Говорят, что α_1 *абсолютно непрерывен относительно* α_2, если мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно μ_2 на носителе $\mathrm{supp}(\mu_2)$. Если, кроме того, функционал α_2 абсолютно непрерывен относительно функционала α_1, то говорят, что функционалы α_1 и α_2 *взаимно абсолютно непрерывны*.

Замечание. Линейная оболочка системы взаимно абсолютно непрерывных функционалов пространства $C^*(X)$ состоит из взаимно абсолютно непрерывных функционалов. В самом деле, пусть $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ является суммой двух взаимно абсолютно непрерывных функционалов α_1 и α_2. По теореме Радона–Никодима $d\nu_{12} = d\nu_1 + d\nu_2 = (\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2)d\mu = \phi_3 d\mu_3$, где $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $d\mu_1 = \rho_1 d\mu$, $d\mu_2 = \rho_2 d\mu$, $d\mu_3 = \rho d\mu$, $\rho = |\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2|$, $\phi_3 = (\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2)/\rho$.

Пусть функционал α_4 абсолютно непрерывен относительно α_1 и α_2. Тогда, если $A \subset \mathrm{supp}(\mu_3)$ и $\mu_3(A) = 0$, то получаем $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$ и, значит, $\mu_4(A) = 0$, т.е. функционал α_4 абсолютно непрерывен относительно α_3. С другой стороны, пусть функционалы α_1 и α_2 абсолютно непрерывны относительно α_4. Если $A \subset \mathrm{supp}(\mu_4)$ и $\mu_4(A) = 0$, то $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$ и, значит, $\mu_3(A) = 0$, т.е. функционал α_3 абсолютно непрерывен относительно α_4.

Теорема 5. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ конечной коразмерности тогда и только тогда является чебышевским, когда для всех точек $p \in K$ и ненулевых функционалов $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ выполняются следующие условия:*

(a) функционал α является опорным в пространстве $C(X)$;

(b) функционалы из $\nabla_p^\circ K$ взаимно абсолютно непрерывны;

(c) множество $zero(\alpha) = X \setminus supp(\alpha)$ имеет не более, чем m_p точек;

(d) система функций $\{\chi_x | x \in zero(\alpha)\}$ линейно не зависит от $\Pi_p K$ над полем $\mathbb{F}$.

Доказательство. *Необходимость*. Так как наибольшее подпространство клина $\Pi_0 K = K \cap (-K)$ имеет конечную коразмерность и функционал $\alpha \in \Pi_0^\perp K$, то условие (a) необходимо для того, чтобы клин обладал существования [6, с. 649]. В силу теоремы 4 условия (c) и (d) необходимы для того, чтобы клин обладал свойством единственности. Докажем, что выполнено условие (b).

Предположим, что найдутся такие функционалы $\alpha_1, \alpha_2 \in \nabla_p^\circ K$, что функционал α_2 не является абсолютно непрерывным относительно α_1. В силу замечания, сделанного перед теоремой, не ограничивая общности, можем предполагать, что функционал α_1 является окруженной точкой клина $\nabla_p^\circ K$. Поскольку клин K обладает свойством существования в пространстве $C(X)$, то каждый регулярный функционал из второго сопряженного пространства $C^{**}(X)$ имеет регулярную мажоранту на полярнном* клине K°. Следовательно, для доказательства условия (b) необходимо построить такой регулярный функционал на пространстве $C^*(X)$, который не имеет регулярной мажоранты на полярном* клине K° [11, с. 26].

Пусть $d\nu_1 = \phi_1 d\mu_1$ и $d\nu_2 = \phi_2 d\mu_2$ представляющие меры для функционалов $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*(X)$. По лемме 3 и условию (a) можно считать, что аргументы ϕ_1 и ϕ_2 непрерывны соответственно на носителях $\mathrm{supp}(\mu_1)$ и $\mathrm{supp}(\mu_2)$. В силу нашего предположения найдется борелевское множество $B \subset \mathrm{supp}(\mu_1) \cap \mathrm{supp}(\mu_2)$, т.ч. $\mu_1(B) = 0$ и $\mu_2(B) > 0$. Поскольку одно из множеств $\{x \in B | \mathrm{Re}\, \overline{\phi_1(x)} \phi_2(x) \geq 0\}$ либо $\{x \in B | \mathrm{Re}\, \overline{\phi_1(x)} \phi_2(x) \leq 0\}$ имеет положительной меры μ_2, то мы можем считать для определенности, что действительная часть $\mathrm{Re}\, \overline{\phi_1(x)} \phi_2(x) > 0$ при всех $x \in B$. Кроме того, будем предполагать далее, что нормы функционалов $\|\alpha_1\| = \mu_1(X) = 1$ и $\|\alpha_2\| = \mu_2(X) = 1$.

Определим функционал Φ с носителем в множестве $\mathrm{supp}(\mu_1) \cup \mathrm{supp}(\mu_2)$, заданный на клине K°, по формуле $\Phi(\alpha) \doteqdot \int_X f\phi \, d\mu$, где $d\nu \doteqdot \phi d\mu$ обозначает представляющую меру функционала $\alpha \in K^\circ$, а функция f равна $f(x) = \overline{\phi_1(x)}$ на множестве $x \in \mathrm{supp}(\mu_1) \backslash B$ и равна $f(x) = -\overline{\phi_2(x)}$ на множествах $x \in B$ или $x \in \mathrm{supp}(\mu_2) \backslash \mathrm{supp}(\mu_2)$. Поскольку клин K° имеет конечную размерность, то функционал Φ является регулярным на линейной оболочке клина K° и имеет регулярное продолжение по линейности на все пространство $C^*(X)$. При этом его субнорма на клине K° равна $\|\Phi\|_{K^\circ} = \Phi(\alpha_1) = \mu(X) = 1$.

Предположим, что Φ имеет регулярную мажоранту $\widehat{\Phi}$ на клине K° с нормой $\|\widehat{\Phi}\| = 1$. Тогда найдется непрерывная функция $g \in C(X)$, что