

NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM

**II.
Nová teorie
množin
a polomnožin**

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
II. Nová teorie množin a polomnožin

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčková
Vydání první

© Univerzita Karlova v Praze, 2015
© Petr Vopěnka – dědicové, 2015

ISBN 978-80-246-2986-5
ISBN 978-80-246-3228-6 (online : pdf)



Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Úvod	9
1. Základní pojmy	15
1.1 Třídy, množiny a polomnožiny	15
1.2 Obzor	19
1.3 Geometrický obzor	24
1.4 Konečná přirozená čísla	26
2. Prodloužení konečných přirozených čísel	29
2.1 Přirozená čísla v krajině známosti geometrického obzoru	29
2.2 Axiom prodloužení	31
2.3 Některé důsledky axiomu prodloužení	32
2.4 Odkryté třídy	33
2.5 Vytváření spočetných tříd	36
2.6 Řezy na přirozených číslech	41
3. Dva důležité druhy tříd	43
3.1 Motivace: prvoevidovatelné jevy	43
3.2 Matematizace: σ -třídy a π -třídy	45
3.3 Aplikace	49
3.4 Komolení přírodních jevů	52
4. Hierarchie deskriptivních tříd	55
4.1 Borelovské třídy	55
4.2 Analytické třídy	58
5. Topologie	61
5.1 Motivace: mediální pohled na množinu	61
5.2 Matematizace: ekvivalence nerozlišitelnosti	63
5.3 Historické intermezzo	67
5.4 Povaha topologických tvarů	68
5.5 Aplikace: neviditelné topologické tvary	70
6. Synoptická nerozlišitelnost	73
6.1 Synoptická symetrie nerozlišitelnosti	73
6.2 Geometrická ekvivalence nerozlišitelnosti	76

7. Některé další netradiční motivace	79
7.1 Topologické patvary	79
7.2 Čas	80
7.3 Imaginární polomnožiny	83
Summary	85
Seznam značení	87
Literatura	89

Předmluva

V této knize je předvedena matematizace některých jevů v teorii, která je reakcí na iluzorní Cantorovu teorii množin. Tato teorie byla rozvíjena od poloviny sedmdesátých let dvacátého století především v Praze a v Bratislavě jako alternativa ke klasické teorii Cantorově. Dnes je ovšem tato původně alternativní teorie množin novou teorií množin a polomnožin, neboť není nic, čeho by mohla být alternativou.

Na veřejnosti se alternativní teorie množin poprvé objevila v knize *Mathematics in the Alternative Set Theory*.¹ Její překlad do ruštiny doplněný o dva dodatky vydalo nakladatelství Mir.² Podstatně rozšířena pak tato kniha vyšla slovensky pod názvem *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*.³ Překlad tohoto vydání do ruštiny s dodatkem od Pavola Zlatoše a s opravami N. V. Beljakina byl vydán v roce 2004.⁴

Poslední dvě ze shora uvedených knih obsahují též výsledky některých dalších členů týmu zkoumajícího alternativní teorii množin. Těmi z nich, kteří významně přispěli k rozvoji této teorie, jsou především (v abecedním pořadí) Karel Čuda, Josef Mlček, Alena Vencovská a Pavol Zlatoš.

V této knize ovšem tyto jejich výsledky, stejně jako mnohé další, uvedeny nejsou. Je tomu tak proto, že důsledné trvání na neaktualizovatelnosti oboru všech přirozených čísel kupodivu umožnilo zjednodušit řadu pojmů, a tedy i jazyka této teorie. Přepsat do nově zjednodušené podoby všechny dosažené výsledky a znovu posoudit účelnost některých z nich vyžaduje delší čas. Kromě toho použitelnost této nové teorie na infinitezimální kalkul otevřela množství lákavých možností jejího dalšího rozvoje.

¹Petr Vopěnka (1979). *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft.

²Petr Vopěnka (1983). *Matematika v alternativnoj teorii mnozestv*. Moskva: Izdatel'stvo Mir.

³Petr Vopěnka (1989). *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Bratislava: Vydavateľstvo Alfa.

⁴Petr Vopěnka (2004). *Alternativnaja teorija množestv: novyj vzgljad na beskonečnosť*. Novosibirsk: Izdatel'stvo Instituta matematiki.

Úvod

Neaktualizovatelnost oboru všech přirozených čísel neboli neexistence množiny všech těchto čísel má pro infinitní matematiku dvacátého století dalekosáhlé důsledky. Vyřazuje totiž ze hry jediného, Bolzanem nalezeného a dodnes nenahraditelného ručitele existence množiny všech přirozených čísel, jímž byl Bůh středověké a barokní rozumářské teologie. Nejde ale jen o samotnou existenci této množiny, ale především o to, že většina matematiků pracujících v teoriích opírajících se o Cantorovu teorii množin si při zacházení s nejrůznějšími předměty matematických studií též osvojila schopnosti tohoto božského pozorovatele.

Tomu pak odpovídal i vztah matematiků k nekonečnu, které před nimi leželo v aktuální podobě jako Adam před Bohem na Michelangelovu obraze v Sixtinské kapli.

Nekonečno zůstalo, i když jeho božský pozorovatel a uskutečňovatel zmizel. Jsme vrženi do předmnožinové matematiky. Nejsme nad světem, ale ve světě. Nehledáme nekonečno v Boží mysli, ale ve světě.

Nekonečno, které hledáme, je především to, které je od pradávna přítomné v cestě na hranice světa, v němž pobýváme (popřípadě i kousek za něj). Narazíme na něj ve všech směrech, tedy nejen na cestě do dálky, ale i do mikrosvěta. Při tomto hledání se můžeme opírat o tisícileté poznatky a zkušenosti matematiky.

Nevstoupíme však do předmnožinové matematiky takové, jaká byla, když jsme ji opouštěli, ale vstoupíme do ní s odpovědí na následující otázku, kterou by si měl položit každý filosoficky uvažující matematik.

Jak je možné, že některé poznatky klasické infinitní matematiky jsou použitelné v přirozeném reálném světě, a jiné nejsou použitelné dokonce ani při výkladech světa reálného?

Současná infinitní matematika je založena na Cantorově teorii klasických (rozumí se klasicky vykládaných) nekonečných množin (rozumí se nekonečných aktuálně). V přirozeném reálném světě⁵ se však takové množiny nevyskytují, a nejsou to tedy ony, na něž infinitní matematika přenáší své poznatky.

Pokud jsou některé poznatky klasické infinitní matematiky nějak použitelné v přirozeném reálném světě, pak při výkladech neostrých⁶ jevů tohoto světa. Tak

⁵Přirozeným reálným světem rozumíme v podstatě to prostředí, jehož jevy nazíráme. Reálným světem pak jakési vědou předpokládané rozšíření přirozeného reálného světa.

⁶Neostrost je jevem přirozeného reálného světa a měla by být zabudována i do světa reálného, pokud nechceme sklouznout do Descartova dualismu. Vykládáme-li totiž reálný svět jako ostře vymezený, pak nám nezbyvá než neostrost prohlásit za jev subjektivní, který do objektivního reálného světa nepatří. Následkem toho jsme nuceni přiznat člověku duši, byť ne nutně nesmrtelnou, leč od reálného světa oddělenou. Je-li však člověk i se svým vnímáním součástí reálného světa, pak jeho součástí je i jev neostrosti. Přitom právě neostrost je jevem primárním; není to špatně zachycená ostrost. Naopak ostrost je ve většině případů idealizovanou neostrostí.