

NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM

The background of the central white area is filled with a complex, abstract pattern of numerous thin, dark teal circles. These circles overlap in a way that creates a dense, web-like structure, reminiscent of a geometric construction or a mathematical diagram. The circles vary in size and are distributed across the entire central area, framing the central text.

**IV.
Staronový
diferenciální
počet**

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
IV. Staronový diferenciální počet

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčková
Vydání první

© Univerzita Karlova v Praze, 2015
© Petr Vopěnka – dědicové, 2015

ISBN 978-80-246-2984-1
ISBN 978-80-246-3220-9 (online : pdf)



Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva	7
1. Rozepnutí antického geometrického světa	13
1.1 Antický a klasický geometrický svět	13
1.2 Zákony expanze	14
1.3 Nekonečně velká přirozená čísla	15
1.4 Nekonečně velká a nekonečně malá reálná čísla	16
1.5 Nekonečná blízkost	18
1.6 Zákony zpětné projekce	19
1.7 Aritmetika nevlastních čísel ∞ , $-\infty$	21
1.8 Další trvalá značení používaná v této knize	23
2. Posloupnosti čísel	25
2.1 Kombinační čísla	25
2.2 Limita posloupnosti	26
2.3 Eulerovo číslo	32
3. Spojitost a derivace reálných funkcí	33
3.1 Spojitost funkce v bodě	33
3.2 Derivace funkce v bodě	34
3.3 Funkce spojitě na uzavřeném intervalu	36
3.4 Rostoucí a klesající funkce	38
3.5 Spojité vzájemně jednoznačné funkce	39
3.6 Inverzní funkce a jejich derivace	40
3.7 Derivace vyšších řádů a průběh funkce v bodě	42
3.8 Limita funkce v bodě	45
3.9 Taylorův vzorec	49
4. Elementární funkce a jejich derivace	51
4.1 Obecná mocnina	51
4.2 Funkce exponenciální	54
4.3 Funkce logaritmická	56
4.4 Derivace funkce exponenciální, logaritmické a obecné mocniny	57
4.5 Goniometrické funkce $\sin x$, $\cos x$ a jejich derivace	59
4.6 Goniometrické funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ a jejich derivace	64
4.7 Funkce cyklometrické a jejich derivace	65

5. Číselné řady	69
5.1 Konvergence a divergence	69
5.2 Řady s nezápornými členy	74
5.3 Kritéria konvergence pro řady s kladnými členy	77
5.4 Absolutně a neabsolutně konvergentní řady	80
6. Řady funkcí	83
6.1 Taylorova a Mac Laurinova řada	83
6.2 Mac Laurinova řada exponenciální funkce	84
6.3 Mac Laurinovy řady funkcí $\sin x$, $\cos x$	85
6.4 Umocňování komplexních čísel	86
6.5 Mac Laurinova řada funkce $\log(1+x)$ pro $-1 < x \leq 1$	87
6.6 Mac Laurinova řada funkce $(1+x)^r$ pro $ x < 1$	89
6.7 Binomická řada $\sum \binom{r}{n} x^n$ pro $x = \pm 1$	91
6.8 Rozvoj funkce $\arctg x$ pro $ x \leq 1$	93
6.9 Stejněměrná konvergence	96
Dodatek	101
Summary	105
Seznam značení	107
Literatura	109

Předmluva

Newtonův a Leibnizův objev infinitezimálního kalkulu je dodnes považován za jeden z největších výdobytků lidského ducha. Je tomu tak právem, neboť matematika jím obdržela metodu nevídané účinnosti, která jí umožnila získávat poznatky výrazně překračující obzor do té doby obvyklého geometrického názoru a novověká evropská přírodověda nepostradatelný nástroj, jemuž vděčí za nejeden ze svých triumfálních úspěchů.

Takzvaná vyšší matematika – jak byla nazývána ta část matematiky, která se opírala o infinitezimální kalkul – byla založena na kalkulacích s nekonečně malými veličinami. Přitom nejprve především prostřednictvím podílu dvou a součtu nekonečně mnoha těchto veličin bylo možno získávat veličiny již přístupné dosavadnímu geometrickému názoru. Podle toho je infinitezimální kalkul tradičně rozdělován na kalkul diferenciální a kalkul integrální.

Tajemná povaha nekonečně malých veličin však infinitezimálnímu kalkulu dodávala mystický nádech, čímž samotný jeho objev nabýval v očích mnoha lidí rozměrů až nezasloužených; zároveň ale u nejednoho stroze racionálně uvažujícího matematika vzbuzovala pocit nejistoty. Podezření, že matematika pracuje s pojmy přinejmenším nejasnými, bylo zesilováno nepříjemnými chybami, jichž se mohl dopustit každý, kdo si při kalkulacích s nekonečně malými veličinami počínal nepozorně. Avšak na druhé straně kalkulace opírající se o jakýsi nevědomý nový geometrický názor, týkající se právě nekonečně malých veličin, vedly neomylně k udivujícím a nezpochybnitelným výsledkům.

Matematici, jejichž věda byla považována ze všech věd za nejjistější, se ovšem nemohli smířit s tím, že neplodnější součást matematiky byla založena na mlhavých pojmech. Po několika marných pokusech vynést onen tajemný názor, týkající se nekonečně malých veličin, z nevědomí do vědomí, a tím vyjasnit a vyostřit předmět jeho působnosti tak, jak to přísnost matematiky vyžadovala, nakonec na pojem nekonečně malé veličiny rezignovali. Příležitost jim k tomu poskytl d'Alembert, jenž veden snahou vyloučit aktuální nekonečno z matematiky zavedl pojem limity v jeho nejrůznějších obměnách. O tento pojem se pak matematická analýza mohla opřít a nahrazovat jím v různých úvahách nekonečně malé veličiny, a to i později v době, kdy aktuální nekonečno již v matematice zdomácnělo.

Toto přetváření infinitezimálního kalkulu do $\varepsilon\delta$ -analýzy (nazývané tak dnes poněkud posměšně podle vžitých technik příznačných pro zacházení s limitami) netoliko uspokojovalo nároky matematiků na přesnost a jasnost, ale otevřelo jim nová široká pole působnosti. Nahrazování úvah o nekonečně malých veličinách úvahami o limitách nebylo totiž záležitostí zcela mechanickou, ale nezřídka vyžadovalo přístupy tvůrčí. Kromě toho postupy a metody vypracované při této činnosti bylo možno zobecňovat a užít při zkoumání mnohem obsáhlejších předmětů studia, než je obor reálných čísel a funkcí. To spolu se vstupem teorie množin do matematiky dalo vznik takovým oborům, jako je topologie či funkcionální analýza.

Úspěšným zvládnutím všeho, čeho do poloviny devatenáctého století dosáhl infinitezimální kalkulu, odstraněním různých chyb a omylů, k nimž při zacházení s nekonečně malými veličinami došlo, vyjasněním některých nedorozumění a v neposlední řadě nesmírnou plodností toho směru, jímž se matematikové vydali při odstraňování nekonečně malých veličin, tím vším bylo vyvoláno všeobecné přesvědčení, že právě $\varepsilon\delta$ -analýza je onou hledanou správnou odpovědí na otázky týkající se základů infinitezimálního kalkulu. I když z dějin matematiky nebylo možno původní pojetí infinitezimálního kalkulu vymazat, nehledě na to, že například fyzikové se diktátu $\varepsilon\delta$ -analýzy zcela nepodrobili, matematici považovali původní infinitezimální kalkulu nekonečně malých veličin v lepším případě za jakési historické nedopatření, v horším pak za naprostý nesmysl.

Fyzikové se ovšem původního pojetí infinitezimálního kalkulu nedrželi z nějakého marnivého vzdoru vůči matematikům, ale proto, že $\varepsilon\delta$ -analýza potlačila to, na čem především byla založena síla infinitezimálního kalkulu. Totiž jednak intuici opírající se o onen podivný, leč nadmíru užitečný názor týkající se nekonečně malých veličin, jednak o ni opřenou průhlednost kalkulací s těmito veličinami. K zachycení názorných pojmů infinitezimálního kalkulu bylo v $\varepsilon\delta$ -analýze potřeba mnohem více kvantifikátorů a jednoduché kalkulace byly nahrazeny tvrzeními často s málo průhlednými důkazy. Ostatně ne jeden matematik tajně s nekonečně malými veličinami pracoval a výsledky takto získané klopotně překládal do $\varepsilon\delta$ -analýzy. Tato neupřímnost matematiků se projevila například i v tom, že v univerzitních kurzech matematické analýzy se sice přednášelo řešení diferenciálních rovnic, mlčky se však předpokládalo, že sestavování či odvozování těchto rovnic se studenti naučí v kurzech fyziky. Ve dvacátém století pak některé důležité a názorné pojmy, které vypracovali fyzikové užitím nekonečně malých veličin, mohly být těchto veličin zbaveny jen tak, že byly složité modelovány prostředky funkcionální analýzy. Výmluvným příkladem toho je známá Diracova funkce.

Obrat nastal až v polovině dvacátého století, a sice v souvislosti s objevem nestandardních modelů teorie množin. Tyto modely se vyznačují tím, že původní – to je standardní – přirozená čísla jsou v nich prodloužena o takzvaná čísla nestandardní, leč od standardních vnitřními prostředky příslušného modelu neodlišitelná. O tom, že obrácené hodnoty těchto nestandardních přirozených čísel modelují nekonečně malá čísla, jistě není třeba nikoho přesvědčovat. Této příležitosti se chopil Abraham Robinson, který vybudoval základy takzvané nestandardní analýzy. Jemu a jeho následovníkům se tak podařilo rehabilitovat oprávněnost veškerých technik používaných při kalkulacích s nekonečně malými veličinami, a navíc ospravedlnit i některé další užitečné principy jich se týkající; dokonce i takové, které by objevilé infinitezimálního kalkulu přijali s rozpaky.

Tato rehabilitace nekonečně malých veličin a kalkulací s nimi byla sice matematiky zabývajících se $\varepsilon\delta$ -analýzou uznána – ostatně neuznat ji nebylo možné –, nicméně proti nestandardní analýze byly vznášeny různé námitky, z nichž následující dvě jsou závažné.

Za prvé: rehabilitace technik používaných při kalkulacích s nekonečně malými veličinami ještě neznamená rehabilitaci původní intuice potřebné k zacházení s těmito veličinami. Nestandardní analýza totiž nepostihla nekonečně malé veličiny

v jejich původní podobě, ale pouze je modelovala. Následkem toho původní intuici nahradila intuicí jinou, sice příbuznou, kterou si však může osvojit je ten, kdo zná nestandardní modely teorie množin. K tomu je ale nezbytné mít mnoho znalostí z moderní teorie množin a matematické logiky. Z toho důvodu nelze ani nestandardní analýzu přednášet v běžných univerzitních kurzech. Pro fyziky – a vůbec pro ty, kdož dosud používají původní infinitezimální kalkul – je objev nestandardní analýzy sice velkým zadostiučiněním, méně však již účinnou pomocí, neboť jde o zadostiučinění formální.

Za druhé: nestandardní analýza vlastně jenom překládá výsledky získané $\varepsilon\delta$ -analýzou do jazyka nekonečně malých veličin. Žádné nové výsledky však nepřináší. Dokud nepředvede něco, co $\varepsilon\delta$ -analýza nedovede, jde vlastně jen o zajímavou hříčku.

Tato druhá námitka je především licoměrná. Vždyť $\varepsilon\delta$ -analýza (alespoň v počátečním období) nedělala nic jiného, než že překládala pojmy a poznatky infinitezimálního kalkulu do jazyka limit. Správně by tedy ona měla předvést něco, co nestandardní analýza nedovede. Nic takového však $\varepsilon\delta$ -analýza předvést nemůže, neboť jazyk nestandardní analýzy je (konzervativním) rozšířením jazyka $\varepsilon\delta$ -analýzy a vše, co je vyjádřeno a dokázáno v $\varepsilon\delta$ -analýze, je automaticky vyjádřeno a dokázáno v nestandardní analýze.

Avšak i kdyby nestandardní analýza nepřinesla žádný poznatek, který $\varepsilon\delta$ -analýza nedovede získat, nebyl by to ještě dostatečný důvod pro její odmítnutí. Ostatně například komplexní čísla jsou konzervativním rozšířením čísel reálných (to znamená, že o reálných číslech nelze jejich prostřednictvím dokázat nic, co by nebylo možno dokázat již jen užitím samotných reálných čísel), kdo se však pokouší dokázat například tvrzení o rozkladu polynomu s reálnými koeficienty na kvadratické a lineární polynomy rovněž s reálnými koeficienty (tedy tvrzení týkající se výhradně reálných čísel), ten teprve užitečnost komplexních čísel náležitě ocení.

Kromě toho zastánci $\varepsilon\delta$ -analýzy mlčky od nestandardní analýzy vyžadují, aby poznatek, který $\varepsilon\delta$ -analýza získat nedovede, byl formulován v jazyce $\varepsilon\delta$ -analýzy. Tím je ovšem nestandardní analýza předem degradována na pouhý nástroj k získávání poznatků $\varepsilon\delta$ -analýzy. To je ale podobné tomu, jako bychom v teorii komplexních čísel uznávali jen ty pojmy a poznatky, které se týkají jen čísel reálných, a tedy takovým pojmům, jako jsou například čísla komplexně sdružená, goniometrické vyjádření komplexního čísla a podobně, přiznávali jen služebnou povahu a poznatku $e^{2\pi i} = 1$ nepřiznali žádnou mimořádnou hodnotu.

Naopak $\varepsilon\delta$ -analýza by si měla položit otázku, zda některé její postupy nepřipomínají klopotnou práci, kterou by bylo nutno konat, kdybychom si při úvahách o číslech reálných zakázali myslet o číslech komplexních. Lze ovšem namítat, že příklad komplexních a reálných čísel je pro námi probíraný případ nevhodný, dokonce že je jím situace v matematické analýze tendenčně zkreslována.

Při takovýchto sporech však svářícím se stranám uniká mnohem závažnější skutečnost; totiž že vznik nestandardní analýzy umožnil jasně formulovat otázku, zda $\varepsilon\delta$ -analýza dosáhla cíle, který si předsevzala. To znamená, zda se jejím prostřednictvím vskutku podařilo eliminovat nekonečně malé veličiny, aniž tím matematika utrpěla nějakou větší újmu. Tuto otázku lze například formulovat tak, zda kaž-

dou vlastnost reálných funkcí, v jejíž definici jsou kvantifikována pouze čísla reálná a čísla nekonečně malá, lze ekvivalentně vyjádřit smysluplnou definicí, v níž jsou kvantifikována již jen čísla reálná (tedy nikoliv již čísla nekonečně malá).

V dodatku k této knize je uveden návod, podle něž lze poměrně jednoduše takto do $\varepsilon\delta$ -analýzy překládat jisté pojmy a jistá tvrzení, v jejichž formulacích se vyskytují nejvýše dvě střídající se kvantifikace nekonečně malých čísel. Toto pravidlo však již nelze zdánlivě nasnadě jsoucím způsobem zobecnit na případ většího počtu střídajících se kvantifikací nekonečně malých čísel, což dokázal Karel Čuda.

Tím je tedy vymezen okruh pojmů a tvrzení infinitezimálního kalkulu, které $\varepsilon\delta$ -analýza tak říkajíc hravě zvládla. Patří mezi ně pojem limity, spojitosti, derivace prvního i vyšších řádů a podobně. Ke zvládnutí složitějších pojmů infinitezimálního kalkulu bez užití nekonečně malých veličin je však třeba vstupovat do složitějších množinových struktur a následkem toho názorné pojmy zachycovat prostřednictvím pojmů mnohem složitějších a méně názorných. Tím lze také vysvětlit, proč přetváření infinitezimálního kalkulu do $\varepsilon\delta$ -analýzy probíhalo zprvu hladce, avšak v určitém okamžiku bylo nutno vypomáhat si metodami funkcionální analýzy, topologie, složitými metodami moderní diferenciální geometrie a podobně.

To ovšem nasvědčuje tomu, že $\varepsilon\delta$ -analýza může dosáhnout vytčeného cíle jen s vydatnou pomocí teorie množin, spočívající v její široké nabídce nej-různějších množinových struktur vhodně obalujících či doplňujících obor reálných čísel a funkcí. Není bez zajímavosti, že především pro tuto účast na problémech matematické analýzy byli matematici po jistém zdráhání nuceni uznat teorii množin za plnohodnotnou matematickou disciplínu; nic jiného jim totiž nezbývalo. Pripustíme-li však, aby si $\varepsilon\delta$ -analýza brala při dosahování svého cíle na pomoc různé struktury nabízené teorií množin, pak ale právě nestandardní modely teorie množin představují vůbec nejvhodnější množinovou strukturu, kterou může teorie množin k uvedenému účelu $\varepsilon\delta$ -analýze nabídnout. Jinými slovy, právě vytvoření těchto modelů a s tím související vznik nestandardní analýzy je možno považovat za konečné dosažení cíle $\varepsilon\delta$ -analýzy.

Naproti tomu považujeme-li za nepřípustné, aby si $\varepsilon\delta$ -analýza brala při dosahování předsevzatého cíle na pomoc teorii množin, pak jsme ovšem nuceni konstatovat, že $\varepsilon\delta$ -analýza tohoto cíle nedosáhla. Nejen to, často až fanatickým zatracováním nekonečně malých veličin uzavřela matematice jednu ze slibných cest rozvoje. Totiž přímé studium pojmů, v jejichž definicích se vyskytuje větší počet střídajících se kvantifikací nekonečně malých veličin, a vyhledávání tomu odpovídajících pravidel kalkulací. Následkem toho mnoho desetiletí trvající přesvědčení matematiků, že $\varepsilon\delta$ -analýza je plnohodnotnou náhražkou infinitezimálního kalkulu, se řadí po bok největších omylů v myšlenkovém vývoji evropského lidstva.

První ze shora uvedených námitek proti nestandardní analýze je tedy mnohem závažnější než druhá. Nemůžeme ji totiž odmítnout, ledaže bychom se prohlásili za čisté formalisty, uznávající toliko syntaktickou stránku matematických teorií, aniž bychom si kladli otázku, o čem pojednávají. Takové rozhodnutí může sice učinit každý sám za sebe, nelze ho však vnutit ostatním matematikům, natož pak fyzikům či jiným uživatelům infinitezimálního kalkulu. Přes veškerou snahu některých ma-

tematiků zjednodušit výchozí předpoklady nestandardní analýzy, a tím ji pokud možno co nejvíce zpřístupnit, tato námitka trvá. Samotná nestandardní analýza není schopna se s ní vyrovnat; brání jí v tom meze, v nichž je sevřeno její pojetí.

Uvedená námitka může být odstraněna jedině tehdy, bude-li rehabilitován původní infinitezimální kalkul ve své nezkreslené podobě; tedy nikoliv jen techniky kalkulací s nekonečně malými veličinami, ale i původní intuice potřebná k zacházení s těmito veličinami. K tomu je ovšem nezbytné vyvést z nevědomí do vědomí onen podivný geometrický názor týkající se nekonečně malých veličin, jenž stál u zrodu infinitezimálního kalkulu.

Jinými slovy, je třeba jasně říci, co jsou nekonečně malé veličiny; ne ty, které studuje nestandardní analýza, ale ty, s nimiž odvážně a přitom bezpečně kalkulovali Newton, Leibniz a ne jeden pozdější matematik či fyzik.

Právě o takto pojatou rehabilitaci infinitezimálního kalkulu v této knize jde.