NOVÁ INFINITNÍ MATEMATIKA

KAROLINUM

I.
Velká iluze matematiky 20. století

PETR VOPĚNKA

Nová infinitní matematika
I. Velká iluze matematiky 20. století

Petr Vopěnka

Vydala Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum
www.cupress.cuni.cz
Redakce Lenka Ščerbaničová
Obálka Jan Šerých
Sazba Šárka Voráčová
Vydání první

© Univerzita Karlova v Praze, 2015
© Petr Vopěnka – dědicové, 2015

ISBN 978-80-246-2987-2
ISBN 978-80-246-3221-6 (online : pdf)

Univerzita Karlova v Praze
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Několik slov o obsahu a zpracování tohoto spisu 9

Teologické základy Cantorovy teorie množin

1. Potenciální a aktuální nekonečno 13
   - 1.1 Aurelius Augustinus (354–430) 14
   - 1.2 Tomáš Akvinský (1225–1274) 14
   - 1.3 Giordano Bruno (1548–1600) 16
   - 1.4 Galileo Galilei (1564–1654) 19
   - 1.5 Odmítnutí aktuálního nekonečna 20
   - 1.6 Infinitezimální počet 23
   - 1.7 Magie čísel 24
   - 1.8 Jean le Rond d'Alembert (1717–1783) 26
2. Disputace o nekonečnu v barokní Praze 29
   - 2.1 Rodrigo de Arriaga (1592–1667) 29
   - 2.2 Františkánská škola 34
3. Bernard Bolzano (1781–1848) 37
   - 3.1 Pravda o sobě 37
   - 3.2 Aktuálně nekonečné množství 39
   - 3.3 Paradox nekonečna 41
   - 3.4 Relační struktury na nekonečném množství 43
4. Georg Cantor (1845–1918) 45
   - 4.1 Transfinitní ordinální čísla 45
   - 4.2 Aktuální nekonečno 46
   - 4.3 Odmítnutí Cantorovy teorie 47

Rozmach Cantorovy teorie množin

5. Základní pojmy Cantorovy teorie množin 57
   5.1 Relace a funkce 60
   5.2 Uspořádání 62
   5.3 Dobrá uspořádání 63

6. Ordinální čísla 67

7. Postuláty Cantorovy teorie množin 69
   7.1 Kardinální čísla 70
   7.2 Postulát potenční množiny 72
   7.3 Postulát dobrého uspořádání 75
   7.4 Námitky francouzských matematiků vůči Cantorovým postulátům . 77

8. Velké mohutnosti 81
   8.1 Počáteční ordinální čísla 81
   8.2 Zornovo lemma 83

9. Podněty usměrňující vývoj Cantorovy teorie množin 85
   9.1 Kolonizace infinitní matematiky 85
   9.2 Korpusy množin 89
   9.3 Vstup matematického formalismu do teorie množin 90

Vrchol a pád

10. Ultrafiltry 97

11. Měřitelná kardinální čísla 99

12. Formalizace jazyka teorie množin 103

13. Ultraprodukt přes pokrývací strukturu 105

14. Rozmanitost oborů všech množin 109
   14.1 Ultraextenze oboru všech množin 109
   14.2 Operátor ultraextenze 111
   14.3 Rozšíření působnosti operátoru ultraextenze 112
   14.4 Množina všech přirozených čísel neexistuje 113
   14.5 Rozšířitelné obory množin 114
   14.6 Problém nekonečna 119

Summary 121
Seznam značení 123
Literatura 125

A řekli: „Nuže vybudujme si město a věž, jejíž vrchol bude v nebi. Tak si zajistíme, abychom nebyli rozptýleni po celé zemi.“ I sestoupil Hospodin, aby viděl město a věž, které budovali synové lidští. Řekl totiž Hospodin: „Hle jsou jeden lid a mají všichni jednu řeč. A toto je začátek jejich díla. Teď nebudou chtít ustoupit od ničeho, co si usmyslí provést. Nuže sestoupíme a zmateme tam jejich řeč, aby si vzájemně nerozuměli.“ I rozehnal je Hospodin po celé zemi a upustili od budování města.

Gn 11, 4–8

Několik slov o obsahu a zpracování tohoto spisu

Podnět k napsání těchto čtyř (s Prolegomeny pěti) útlých knih o nové infinitní matematice vzešel od Miroslava Holečka, ředitele Ústavu nových technologií na Západočeské univerzitě v Plzni. V jím pořádaných teoretických seminářích pak moje práce na těchto knihách nacházela porozumění a podporu.

Z množství nejrůznějších poznatků týkajících se nové infinitní matematiky jsem k uveřejnění vybral následující čtyři tematické okruhy.

V knize *Velká iluze matematiky 20. století* je zdůvodněna a dokumentována nezbytnost vypracování nové infinitní matematiky. V knize *Nová teorie množin a polomnožin* je studováno nekonečno ukazující se na neostře vymezených množstvích. Kniha *Reálná čísla a jejich diskretizace* je věnována rozmístění nekonečně malých čísel na číselné ose a operacím prováděným s těmito čísly. Ve čtvrté knize *Staronový diferenciální počet*, jak samotný její název vypovídá, je obsažena úplná rehabilitace původního Leibnizova diferenciálního počtu. Aby tuto knihu bylo možno číst samostatně, jsou na jejím začátku uvedeny jen nezbytné pojmy a vlastnosti týkající se nekonečně malých čísel. Podobné zpracování integrálního počtu by si vyžádalo znalost některých dalších poznatků uvedených v předcházející třetí knize.

Bez obětavé pomoci mnohých mých kolegyň a kolegů by tento spis jen stěží mohl vzniknout. Především Marie Větrovcová působící na katedře filozofie Západočeské univerzity zpracovala z mých rukopisů Prolegomena, druhou, třetí a čtvrtou knihu. Ondřej Chvojka opravil některé chyby v mých výpočtech obsažených ve čtvrté knize.

Mnoho věcných připomínek jsem obdržel od Aleny Vencovské působící na univerzitách ve Velké Británii. V neposlední řadě zajímavé (většinou do tohoto spisu nezařazené) podněty z fyziky mi poskytl Miroslav Holeček. Všem zde jmenovaným a mnoha dalším patří můj dík.

Petr Vopěnka

Teologické základy Cantorovy teorie množin

1. Potenciální a aktuální nekonečno

K zúžení a vyhrocení pojmu nekonečna došlo již někdy při prvních střetech křesťanské teologie s antickou vědou. Tehdy byly potlačovány ty významy tohoto pojmu, které poukazují na neurčitost, neuchopitelnost a nejistotu. Novověká věda – spolu s vlivnými částmi filosofie a teologie, jež jsou s ní svázány – pak od takových významů pojem nekonečna zcela očistila. Proto i my (pokud nebude řečeno jinak) budeme nyní názvem nekonečno označovat pouze nekonečno opatřené klasickým výkladem; tedy to nekonečno, které je ve vědeckých kruzích s tímto názvem dodnes spojováno.

K našemu prvotnímu setkání s takto vykládaným nekonečnem dochází u ostře vymezených nekonečných dění, to znamená při čerpání nějakých stálých, přesně určených, leč nevyčerpatelných možností. Tak je tomu při opakovaném přičítání jedničky k nějakému číslu, při opakovaném prodlužování úsečky o danou délku v klasickém geometrickém prostoru a podobně. Tato podoba nekonečna obdržela název **nekonečno potenciální**. Na takovéto dění má totiž nekonečno vliv, těchto dění se zmocnilo, jemu tato dění podléhají. Naproti tomu **aktuálním nekonečnem** rozumíme tu podobu jevu nekonečna, která se ukazuje na díle vytvořeném vyčerpáním všech příslušných nevyčerpatelných možností. Tak například řekneme-li, že posloupnost přirozených čísel 1, 2, 3, ... je potenciálně nekonečná, pak tím rozumíme, že vytvořeno je vždy jen konečně mnoho těchto čísel, avšak vždy lze vytvořit nějaká další. Řekneme-li, že je tato posloupnost aktuálně nekonečná, pak tím rozumíme, že všechna přirozená čísla jsou již vytvořena (a žádná další tedy již vytvořit nelze). Podobně je i zmíněné prodlužování úsečky potenciálně nekonečné; dílo, jež po všech těchto prodlužováních vznikne, již není úsečka, ale přímka (popřípadě polopřímka), na níž se již nekonečno ovládající toto dílo projevuje ve své vítězné, aktuální podobě.

Již v samotném vymezení aktuálního nekonečna je až příliš nápadný protimluv. Požaduje se, aby to, co je nevyčerpatelné, bylo vyčerpáno, aby neukončitelné dospělo ke svému konci, tedy vlastně aby se to, co je nekonečné, v jistém smyslu stalo zároveň konečným. Přesto aktuální nekonečno nebylo všeobecně zavrženo jakožto pojem logicky sporný a z pouhého čistého rozumu nepřijatelný, ale čas od času se vkrádalo do úvah některých myslitelů.

Novověká evropská věda ovšem přílišnou důvěrou v aktuální nekonečno nehýřila a jak jen mohla, snažila se ho – více či méně úspěšně – obejít prostřednictvím nekonečna potenciálního, jehož klasický výklad byl všeobecně přijímán.

V neodbytné naléhavosti se však problém aktuálního nekonečna ohlašoval téměř neustále v souvislosti s výklady křesťanského Boha. Problém aktuálního nekonečna tak byl – a vlastně dodnes je – především problémem teologickým, i když od poloviny devatenáctého století si novověká matematika přisvojila, upravila a do sebe vstřebala tu část teologie, která se kolem něj vytvořila. Dříve však, než k tomu došlo, potýkalo se s tímto problémem evropské myšlení velmi usilovně. Na některé významné mezníky zmíněné potyčky upozorníme v kapitole, kterou právě otevíráme.