Základy náhodných procesů II

Zuzana Prášková

UNIVERZITA KARLOVA
NAKLADATELSTVÍ KAROLINUM

Základy náhodných procesů II

Zuzana Prášková

Recenzovali:
doc. RNDr. Tomáš Cipra, DrSc.
Mgr. David Kraus

Vydala Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum
jako učební text pro MFF UK
Sazba Zuzana Prášková s použitím typografického systému LaTeX
2., upravené vydání

Text neprošel jazykovou ani redakční úpravou nakladatelství.

ISBN 978-80-246-3516-3
ISBN 978-80-246-3529-3 (online : pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum 2016

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva 7
Seznam použitých symbolů 8

1 Základní pojmy **9**
1.1 Definice a základní charakteristiky náhodného procesu 9
1.1.1 Striktní a slabá stacionarita 11
1.1.2 Vlastnosti autokovarianční funkce 12
1.2 Některé důležité třídy náhodných procesů 15
1.2.1 Markovovy procesy 15
1.2.2 Procesy s nezávislými přírůstky 16
1.2.3 Martingaly 17
1.3 Cvičení a doplňky 17

2 Procesy s konečnými druhými momenty **21**
2.1 Hilbertův prostor 21
2.2 Prostor $L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ 22
2.3 Procesy se spojitým časem v $L_2(\Omega,\mathcal{A},P)$ 25
2.3.1 Spojitost procesu 25
2.3.2 Derivace procesu 26
2.3.3 Riemannův integrál 28
2.4 Cvičení a doplňky 29

3 Spektrální rozklad autokovarianční funkce **31**
3.1 Pomocná tvrzení 31
3.2 Spektrální rozklad autokovarianční funkce 32
3.3 Existence a výpočet spektrální hustoty 35
3.4 Cvičení a doplňky 39

4 Spektrální rozklad náhodného procesu **41**
4.1 Procesy s ortogonálními přírůstky 41
4.2 Integrál podle procesu s ortogonálními přírůstky 42
4.3 Spektrální rozklad stacionárních procesů 47

4.4 Cvičení a doplňky 53

5 Lineární modely časových řad **55**
5.1 Posloupnosti klouzavých součtů 55
5.2 Lineární proces 58
5.3 Autoregresní posloupnosti 62
5.4 Posloupnosti ARMA 71
5.5 Lineární filtry 76
5.6 Cvičení a doplňky 78

6 Vybrané limitní věty **81**
6.1 Zákony velkých čísel 81
6.2 Centrální limitní věty 86
6.3 Cvičení a doplňky 95

7 Predikce **97**
7.1 Predikce v časové doméně 97
7.1.1 Projekce v Hilbertově prostoru 97
7.1.2 Predikce založená na konečné minulosti 99
7.1.3 Rekurzivní postupy pro predikci 103
7.1.4 Predikce založená na nekonečné minulosti 111
7.2 Predikce ve spektrální doméně 114
7.3 Cvičení a doplňky 119

8 Filtrace signálu a šumu **123**
8.1 Filtrace v konečné stacionární posloupnosti 123
8.2 Filtrace v nekonečné stacionární posloupnosti 124
8.3 Cvičení a doplňky 129

9 Odhady průměru a autokorelační funkce **131**
9.1 Odhad průměru 131
9.2 Odhady autokovarianční a autokorelační funkce 132
9.3 Parciální autokorelační funkce 135
9.4 Cvičení a doplňky 142

10 Odhady parametrů v modelech ARMA **145**
10.1 Odhady parametrů v modelech AR 145
10.2 Odhady parametrů v modelech MA a ARMA 149
10.3 Maximálně věrohodné odhady 152
10.4 Cvičení a doplňky 155

11 Periodogram a odhady spektrální hustoty **157**
11.1 Periodogram 157
11.2 Odhady spektrální hustoty 163

Literatura **167**

Předmluva

Toto je druhé vydání učebního textu k předmětu Náhodné procesy 2 pro posluchače MFF UK, kteří studují magisterský studijní program Matematika ve studijních oborech Finanční a pojistná matematika a Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie. Navazuje na učební texty Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů (Karolinum, Praha 1998, 2001, 2005) a Prášková, Z., Lachout, P.: Základy náhodných procesů I (Matfyzpress, Praha 2012) k přednášce Náhodné procesy 1.

Výklad látky začíná opakováním základních vlastností náhodných procesů z předchozího kursu, které doplňuje o nové souvislosti, dále však již pokračuje nezávisle a soustřeďuje se na teorii stacionárních procesů s diskrétním i spojitým časem. Předpokládá pokročilejší znalosti z teorie pravděpodobnosti (např. z přednášky Pravděpodobnost 1) a také základní znalosti funkcionální a komplexní analýzy a matematické statistiky (např. Úvod do funkcionální analýzy, Úvod do komplexní analýzy, Matematická statistika 1).

Do tohoto vydání byly zahrnuty některé zkušenosti z výuky, text byl částečně modifikován a rozšířen. Kapitola 11 je zcela nová. Text byl rovněž doplněn o další literaturu.

autorka

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0$	množina nezáporných celých čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\boldsymbol{x}$	sloupcový vektor
$\boldsymbol{A}$	obecná matice
$\boldsymbol{I}$	jednotková matice
$\|\| \cdot \|\|$	norma prvku
$\mathcal{B}$	borelovská $\sigma-$algebra
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení s parametry μ, σ^2
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	náhodná veličina s rozdělením $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\{X_t, t \in T\}$	proces náhodných veličin
$\mathcal{M}\{X_t, t \in T\}$	lineární obal procesu $\{X_t, t \in T\}$
$\mathcal{H}\{X_t, t \in T\}$	Hilbertův prostor vytvořený náhodným procesem $\{X_t, t \in T\}$
$X \perp Y$	ortogonální náhodné veličiny
$\overline{\lim}$	limes superior
$\xrightarrow{\text{P}}$	konvergence v pravděpodobnosti
$\xrightarrow{\text{D}}$	konvergence v distribuci
l. i. m.	konvergence podle kvadratického středu

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Definice a základní charakteristiky náhodného procesu

Definice 1.1. Nechť $(\Omega,\mathcal{A},P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}$ a $(S,\mathcal{E})$ je obecný měřitelný prostor. Rodina náhodných veličin $\{X_t,\ t \in T\}$ definovaných na $(\Omega,\mathcal{A},P)$ s hodnotami v S se nazývá *náhodný proces.*

V případě, že $T = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ nebo $T \subset \mathbb{Z}$, mluvíme o *procesu s diskrétním časem* nebo o *časové řadě*. Pokud $T = [a,b]$, kde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, říkáme, že $\{X_t,\ t \in T\}$ je *proces se spojitým časem.* Pokud $S = \mathbb{R}$, říkáme, že $\{X_t,\ t \in T\}$ je *reálný náhodný proces.*

Definice 1.2. Dvojice $(S,\mathcal{E})$, kde S je množina hodnot náhodných veličin X_t a $\mathcal{E}$ je $\sigma-$algebra podmnožin S, se nazývá *stavový prostor* procesu $\{X_t,\ t \in T\}$. Pokud náhodné veličiny X_t nabývají pouze diskrétních hodnot, říkáme, že jde o *proces s diskrétními stavy*, nabývají-li hodnot z nějakého intervalu, mluvíme o *procesu se spojitými stavy.*

Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ můžeme chápat jako funkci dvou proměnných ω, t. Pro pevné $t \in T$ je $X_t = X_t(.)$ náhodná veličina definovaná na Ω; pro pevné $\omega \in \Omega$ je $X_{(.)} = X_{(.)}(\omega)$ funkcí proměnné t. Této funkci říkáme *trajektorie procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$.

Definice 1.3. Reálný stochastický proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *měřitelný*, jestliže zobrazení $(\omega, t) \to X_t(\omega)$ je $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T-$měřitelné, kde $\mathcal{B}_T$ je $\sigma-$algebra borelovských podmnožin T a $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_T$ značí součinovou $\sigma-$algebru.

Každé konečné podmnožině $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ lze přiřadit systém náhodných veličin $X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$, které mají sdružené rozdělení s distribuční funkcí

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n).$$

Pro $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \ldots, t_n \in T$ má systém distribučních funkcí $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}$ následující vlastnosti: Pro libovolnou permutaci $i_1, \ldots, i_n$ čísel $1, \ldots, n$ platí

$$F_{t_{i_1},\ldots,t_{i_n}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

a

$$\lim_{x_{n+1}\to\infty} F_{t_1,\ldots,t_n,t_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.2}$$

Systém distribučních funkcí s uvedenými vlastnostmi se nazývá *konzistentní.* Ke každému náhodnému procesu existuje konzistentní systém distribučních funkcí. Naopak platí

Věta 1.1 (Daniellova-Kolmogorovova)**.** *Nechť $\{F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n)\}$ je konzistentní systém distribučních funkcí. Potom existuje náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná $t_1, \ldots, t_n \in T$ a libovolná reálná $x_1, \ldots, x_n$ platí*

$$P(X_{t_1} \le x_1, \ldots, X_{t_n} \le x_n) = F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

Důkaz. Štěpán (1987), věta I.10.3. □

Definice 1.4. *Komplexní náhodná veličina* X se definuje jako $X = Y + iZ$, kde Y a Z jsou reálné náhodné veličiny. Pokud existují střední hodnoty $\mathrm{E}Y$ a $\mathrm{E}Z$, definujeme střední hodnotu komplexní náhodné veličiny X jako $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y + i\mathrm{E}Z$. Existují-li druhé momenty náhodných veličin Y a Z, definujeme rozptyl náhodné veličiny X jako

$$\mathrm{var}\ X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)(\overline{X} - \overline{\mathrm{E}X}) = \mathrm{E}|X - \mathrm{E}X|^2,$$

což je vždy nezáporné číslo.

Komplexní náhodný proces je definován jako rodina komplexních náhodných veličin na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definice 1.5. Nechť $\{X_t,\ t \in T\}$ je náhodný proces takový, že pro každé $t \in T$ existuje střední hodnota $\mathrm{E}X_t$. Potom funkce $\mu_t = \mathrm{E}X_t$ definovaná na T se nazývá *střední hodnota procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$. Proces, jehož střední hodnota je identicky rovna nule, se nazývá *centrovaný.*

Jestliže $\{X_t,\ t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty, tj. $\mathrm{E}|X_t|^2 < \infty$ pro všechna $t \in T$, potom (obecně komplexní) funkce dvou proměnných definovaná na $T \times T$ předpisem $R(s,t) = \mathrm{E}(X_s - \mu_s)(\overline{X}_t - \overline{\mu}_t)$ se nazývá *autokovarianční funkce procesu* $\{X_t,\ t \in T\}$. Hodnota $R(t,t)$ se nazývá *rozptyl procesu* v čase t.

Autokorelační funkce procesu $\{X_t,\ t \in T\}$ s kladnými rozptyly je definována jako

$$r(s,t) = \frac{R(s,t)}{\sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}}, \quad s,t \in T.$$

Definice 1.6. Náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ se nazývá *gaussovský (normální),* jsou-li všechna jeho konečněrozměrná rozdělení normální, tj. jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $t_1, \ldots, t_n \in T$ má vektor $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})'$ $n-$rozměrné normální rozdělení $\mathcal{N}_n(\mathbf{m_t}, \mathbf{V_t})$, kde $\mathbf{m_t} = (\mathrm{E}X_{t_1}, \ldots, \mathrm{E}X_{t_n})'$ a

$$\mathbf{V_t} = \begin{pmatrix} \mathrm{var}X_{t_1} & \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) & \ldots & \mathrm{cov}(X_{t_1}, X_{t_n}) \\ \mathrm{cov}(X_{t_2}, X_{t_1}) & \mathrm{var}X_{t_2} & \ldots & \mathrm{cov}(X_{t_2}, X_{t_n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cov}(X_{t_n}, X_{t_1}) & \mathrm{cov}(X_{t_n}, X_{t_2}) & \ldots & \mathrm{var}X_{t_n} \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Striktní a slabá stacionarita

Definice 1.7. Řekneme, že náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je *striktně stacionární,* jestliže pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, pro libovolná reálná $x_1, \ldots, x_n$ a pro libovolná $t_1, \ldots, t_n$ a h taková, že $t_k \in T, t_k + h \in T, 1 \leq k \leq n$, platí

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{t_1+h,\ldots,t_n+h}(x_1, \ldots, x_n).$$

Je-li proces $\{X_t,\ t \in T\}$ striktně stacionární, pak všechny náhodné veličiny X_t mají stejné rozdělení a základní charakteristiky (střední hodnota, rozptyl, kovariance, ...) se nemění při posunutí v čase. Zavedeme ještě méně přísnou definici stacionarity.

Definice 1.8. Náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty se nazývá *slabě stacionární*, má-li konstantní střední hodnotu $\mu_t = \mu$ pro všechna $t \in T$ a je-li jeho autokovarianční funkce $R(s,t)$ funkcí pouze $s - t$. Je-li splněna pouze podmínka na autokovarianční funkci, mluvíme o *kovarianční stacionaritě.*

Poznámka 1.1. Autokovarianční funkci slabě stacionárních procesů lze definovat jako funkci jedné proměnné vztahem $R(t) := R(t,0),\ t \in T$; autokorelační funkce je potom dána předpisem $r(t) = R(t)/R(0)$.

Věta 1.2. *Striktně stacionární náhodný proces $\{X_t,\ t \in T\}$ s konečnými druhými momenty je i slabě stacionární.*

Důkaz. Je zřejmý, neboť ze striktní stacionarity plyne, že náhodné veličiny X_t mají pro všechna $t \in T$ stejné rozdělení a tedy stejnou konečnou střední hodnotu a podobně náhodné veličiny X_t a X_{t+h} mají pro všechna $t \in T$ a každé h takové, že $t \in T, t+h \in T$, stejné sdružené rozdělení a tedy stejné kovariance. □

Opačné tvrzení obecně neplatí; např. posloupnost $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ definovaná předpisem $X_t = (-1)^t X$, kde X je náhodná veličina nabývající hodnoty $-\frac{1}{4}$ s pravděpodobností $\frac{3}{4}$ a hodnoty $\frac{3}{4}$ s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, je slabě stacionární, neboť $\mathrm{E}X_t = 0, \mathrm{var}\, X_t = \sigma^2 = \frac{3}{16}, R(s,t) = \sigma^2(-1)^{s+t} = \sigma^2(-1)^{s-t}$, ale není striktně stacionární. Platí však

Věta 1.3. *Slabě stacionární gaussovský proces $\{X_t,\ t \in T\}$ je i striktně stacionární.*

Důkaz. Ze slabé stacionarity procesu $\{X_t,\, t \in T\}$ plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolné $t_1, \dots, t_n, h$ mají náhodné vektory $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ a $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ stejnou střední hodnotu a stejnou (konečnou) varianční matici. Protože normální rozdělení je těmito charakteristikami určeno jednoznačně, musí mít tyto vektory stejné rozdělení. □

1.1.2 Vlastnosti autokovarianční funkce

Uveďme nyní základní vlastnosti autokovarianční funkce.

Věta 1.4. *Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty. Potom pro jeho autokovarianční funkci platí*

$$R(t,t) \geq 0,$$
$$|R(s,t)| \leq \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}.$$

Důkaz. První vlastnost je vlastnost rozptylu. Druhá vlastnost plyne ze Schwarzovy nerovnosti, neboť

$$\begin{aligned} |R(s,t)| &= |\mathrm{E}(X_s - \mathrm{E}X_s)(\overline{X_t} - \overline{\mathrm{E}X_t})| \leq \mathrm{E}|(X_s - \mathrm{E}X_s)(\overline{X_t} - \overline{\mathrm{E}X_t})| \\ &\leq (\mathrm{E}|X_s - \mathrm{E}X_s|^2)^{\frac{1}{2}} (\mathrm{E}|X_t - \mathrm{E}X_t|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{R(s,s)}\sqrt{R(t,t)}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 1.2. Pro slabě stacionární proces je tedy $R(0) \geq 0$ a $|R(t)| \leq R(0)$.

Definice 1.9. Nechť $f(s,t)$ je obecně komplexní funkce definovaná na $T \times T$, $T \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná komplexní čísla $c_1, \dots, c_n$ a libovolné body $t_1, \dots, t_n \in T$ platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} f(t_j, t_k) \geq 0. \tag{1.3}$$

Říkáme, že komplexní funkce g jedné proměnné na T je pozitivně semidefinitní, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$, libovolná komplexní čísla $c_1, \dots, c_n$ a libovolné body $t_1, \dots, t_n \in T$, takové že $t_j - t_k \in T$, platí

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} g(t_j - t_k) \geq 0. \tag{1.4}$$

Definice 1.10. Řekneme, že komplexní funkce f na $T \times T$ je *hermitovsky symetrická*, jestliže $f(s,t) = \overline{f(t,s)}$ pro všechna $s,t \in T$.

Komplexní funkce g jedné proměnné se nazývá hermitovsky symetrická, když pro všechna $t \in T$ je $g(-t) = \overline{g(t)}$.

Věta 1.5. *Pozitivně semidefinitní funkce je i hermitovsky symetrická.*

Důkaz. V definici 1.9 pro $n = 1$ stačí zvolit $c_1 = 1$; pro $n = 2$ stačí zvolit $c_1 = 1, c_2 = 1$ a dále $c_1 = 1, c_2 = i (= \sqrt{-1})$. □

Poznámka 1.3. Reálná funkce f dvou proměnných na $T \times T$, která je pozitivně semidefinitní, je symetrická, tj. $f(s,t) = f(t,s)$ pro všechny body $s,t \in T$. Pro reálnou funkci g jedné proměnné na T z pozitivní semidefinitnosti plyne $g(t) = g(-t)$ pro každé $t \in T$.

Věta 1.6. *Nechť $\{X_t, t \in T\}$ je proces s konečnými druhými momenty. Potom jeho autokovarianční funkce je pozitivně semidefinitní na $T \times T$.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že proces je centrovaný. Potom pro každé přirozené číslo n, komplexní konstanty $c_1, \dots, c_n$ a body $t_1, \dots, t_n \in T$ platí

$$
\begin{aligned}
0 \le \mathrm{E}\left|\sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j}\right|^2 &= \mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j X_{t_j} \overline{\sum_{k=1}^{n} c_k X_{t_k}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} \mathrm{E}(X_{t_j}\overline{X_{t_k}}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j \overline{c_k} R(t_j,t_k).
\end{aligned}
$$

□

Věta 1.7. *Ke každé pozitivně semidefinitní funkci R na $T \times T$ existuje náhodný proces $\{X_t, t \in T\}$ s konečnými druhými momenty takový, že R je jeho autokovarianční funkcí.*

Důkaz. Větu dokážeme pouze pro reálnou funkci R. Důkaz pro obecnou pozitivně semidefinitní funkci lze nalézt např. v Loève (1955), kap. X, odst. 34.

Z pozitivní semidefinitnosti funkce R plyne, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $t_1, \dots, t_n \in T$ je matice

$$
\mathbf{V_t} = \begin{pmatrix} R(t_1,t_1) & R(t_1,t_2) & \dots & R(t_1,t_n) \\ R(t_2,t_1) & R(t_2,t_2) & \dots & R(t_2,t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(t_n,t_1) & R(t_n,t_2) & \dots & R(t_n,t_n) \end{pmatrix}
$$

pozitivně semidefinitní. Funkce $\varphi(\mathbf{u}) = \exp\{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{V_t}\mathbf{u}\}$ pro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ je charakteristickou funkcí normálního rozdělení $\mathcal{N}_n(\mathbf{0},\mathbf{V_t})$. Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a libovolná reálná čísla $t_1, \dots, t_n \in T$ takto vytvoříme systém charakteristických funkcí, jemuž odpovídá systém normálních distribučních funkcí, který je konzistentní. Tudíž podle Daniellovy-Kolmogorovovy věty existuje gaussovský náhodný proces, jehož všechny vzájemné kovariance jsou určeny hodnotami funkce $R(s,t)$; funkce R je tedy jeho autokovarianční funkce. □

Příklad 1.1. Zjistěte, zda funkce $\cos t$, $t \in T = (-\infty,\infty)$, je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu.

Řešení: Stačí ověřit, že funkce $\cos t$ je pozitivně semidefinitní. Nechť je $n \in \mathbb{N}$, $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{C}$ a $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c}_k \cos(t_j - t_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c}_k(\cos t_j \cos t_k + \sin t_j \sin t_k)$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n} c_j \cos t_j\right|^2 + \left|\sum_{k=1}^{n} c_k \sin t_k\right|^2 \geq 0.$$

Funkce $\cos t$ je tedy pozitivně semidefinitní, a proto podle věty 1.7 existuje (gaussovský) náhodný proces $\{X_t,\, t \in T\}$, jehož autokovarianční funkce je $R(s,t) = \cos(s-t)$.

Věta 1.8. *Součet dvou pozitivně semidefinitních funkcí je pozitivně semidefinitní funkce.*

Důkaz. Tvrzení plyne z definice pozitivně semidefinitní funkce, neboť jsou-li funkce f a g pozitivně semidefinitní a $h = f + g$, platí pro každé $n \in \mathbb{N}$, komplexní konstanty $c_1,\ldots,c_n$ a body $t_1,\ldots,t_n \in T$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c}_k h(t_j,t_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c}_k[f(t_j,t_k) + g(t_j,t_k)]$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c}_k f(t_j,t_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_j\overline{c}_k g(t_j,t_k) \geq 0.$$

□

Věta 1.9. *Součet dvou autokovariančních funkcí je autokovarianční funkce nějakého náhodného procesu s konečnými druhými momenty.*

Důkaz. Tvrzení je jednoduchým důsledkem vět 1.6, 1.7 a 1.8.

□

Věta 1.10. *Reálná část autokovarianční funkce je také autokovarianční funkcí. Imaginární část je autokovarianční funkcí jen tehdy, je-li identicky rovná nule.*

Důkaz. Bez újmy na obecnosti dokážeme jen pro centrované procesy. Je-li $X_t = Y_t + iZ_t$ komplexní proces s nulovou střední hodnotou, pak $\mathrm{E}Y_t = \mathrm{E}Z_t = 0$ a $R(s,t) = \mathrm{E}X_s\overline{X}_t = \mathrm{E}(Y_s + iZ_s)(Y_t - iZ_t) = \mathrm{E}Y_sY_t + \mathrm{E}Z_sZ_t + i(\mathrm{E}Z_sY_t - \mathrm{E}Y_sZ_t)$. Reálná část je autokovarianční funkcí podle předchozí věty. Protože pro $s = t$ je imaginární část nulová, platí i druhé tvrzení.

□

1.2 Některé důležité třídy náhodných procesů

Stacionární procesy tvoří velmi důležitou třídu náhodných procesů. V následujících kapitolách se budeme zabývat převážně slabě stacionárními procesy. V tomto odstavci se zmíníme ještě o dalších vlastnostech a třídách náhodných procesů.

1.2.1 Markovovy procesy

Definice 1.11. Řekneme, že proces $\{X_t,\, t \geq 0\}$ je *Markovův proces* se stavovým prostorem $(S,\mathcal{E})$, jestliže pro libovolné $t_0, t_1, \ldots, t_n,\ 0 \leq t_0 < t_1 \cdots < t_n$, platí

$$P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_0}) = P(X_{t_n} \leq x | X_{t_{n-1}}) \ \text{ s. j.} \tag{1.5}$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Vlastnost (1.5) se nazývá *markovská vlastnost.* Jednoduchými případy jsou Markovovy procesy s diskrétními stavy, neboli Markovovy řetězce s diskrétním a spojitým časem, které jsou popsány např. v Prášková a Lachout (2005) nebo v Prášková a Lachout (2012).

Příklad 1.2. Uvažujme Markovův řetězec $\{X_t,\, t \geq 0\}$ s množinou stavů $S = \{0,1\}$ a spojitým časem, jehož počáteční rozdělení je $P(X_0 = 0) = 1, P(X_0 = 1) = 0$, a jehož matice intenzit je

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{pmatrix},$$

$\alpha > 0,\ \beta > 0$.

Zkoumejme stacionaritu tohoto procesu. Víme, že všechna konečněrozměrná rozdělení daného řetězce jsou dána počátečním rozdělením a soustavou matic pravděpodobností přechodu $\mathbf{P}(t) = \{p_{ij}(t), i,j \in S\}$ pro všechna $t \geq 0$ (Prášková a Lachout, 2012, odst. 3.1). Matice $\mathbf{P}(t)$ jsou v tomto případě tvaru (viz Prášková a Lachout, 2012, příklad 3.4)

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha - \alpha e^{-(\alpha+\beta)t} \\ \beta - \beta e^{-(\alpha+\beta)t} & \alpha + \beta e^{-(\alpha+\beta)t} \end{pmatrix}.$$

Nyní máme vzhledem k počátečnímu rozdělení

$$P(X_t = 0) = p_{00}(t) = \frac{1}{\alpha+\beta}(\beta + \alpha e^{-(\alpha+\beta)t}),$$

což závisí na t, a podobně dostaneme $P(X_t = 1) = p_{01}(t) = \mathrm{E}X_t$. Proces tedy není striktně, ani slabě stacionární.

Pokud ale počáteční rozdělení je stacionární rozdělení daného Markovova řetězce, potom $\{X_t,\ t \geq 0\}$ je striktně stacionární proces (věta 3.12 v Prášková a Lachout, 2012) se střední hodnotou $\mathrm{E}X_t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ a autokovarianční funkcí

$$R(s,t) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2} e^{-(\alpha+\beta)|s-t|}.$$

Je tedy i slabě stacionární.

1.2.2 Procesy s nezávislými přírůstky

Definice 1.12. Řekneme, že proces $\{X_t,\ t \in T\}$, kde T je interval, má *nezávislé přírůstky*, jestliže pro každé $t_1,t_2,\dots,t_n \in T$ s vlastností $t_1 < t_2 \cdots < t_n$ jsou náhodné veličiny $X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé. Jestliže pro každé $s,t \in T$, $s < t$, rozdělení přírůstků $X_t - X_s$ závisí pouze na $t - s$, řekneme, že proces $\{X_t,\ t \in T\}$ má *stacionární přírůstky.*

Procesem s nezávislými a stacionárními přírůstky je např. *Poissonův proces* s intenzitou λ, což je Markovův řetězec $\{X_t,\ t \geq 0\}$ se spojitým časem takový, že $X_0 = 0$ s. j. a pro $t > 0$ mají náhodné veličiny X_t Poissonovo rozdělení s parametrem λt. Přírůstky $X_t - X_s$ pro $s < t$ mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda(t-s)$. Podrobněji je Poissonův proces popsán např. v Prášková a Lachout (2012), odst. 3.4.

Jak můžeme snadno nahlédnout, rozdělení přírůstků $X_t - X_s$ závisí skutečně jen na $t - s$. Poissonův proces ale není stacionární ani ve striktním, ani v slabém smyslu.

Jiný důležitý proces s nezávislými a stacionárními přírůstky je *Wienerův proces* (někdy též nazývaný proces *Brownova pohybu)*. Je definován jako gaussovský náhodný proces $\{W_t, t \geq 0\}$ s následujícími vlastnostmi:

1. $W_0 = 0$ s. j. a $\{W_t,t \geq 0\}$ má spojité trajektorie.
2. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ jsou přírůstky $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ nezávislé náhodné veličiny.
3. Pro libovolné časové okamžiky $0 \leq t < s$ mají přírůstky $W_s - W_t$ normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptylem $\sigma^2(s-t)$, kde σ^2 je kladná konstanta. Speciálně, pro každé $t \geq 0$ je $\mathrm{E}W_t = 0$ a $\operatorname{var} W_t = \sigma^2 t$.

Jak je vidět, ani Wienerův proces není stacionární ve smyslu definic z odstavce 1.1.1.

1.2.3 Martingaly

Uvedeme jen základní definice.

Definice 1.13. Nechť $(\Omega,\mathcal{A},P)$ je pravděpodobnostní prostor, nechť $T \subset \mathbb{R}, T \neq \emptyset$. Nechť pro každé $t \in T$ je dána σ-algebra $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$. Potom systém σ-algeber $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ takový, že $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pro každé $s,t \in T, s < t$, se nazývá *filtrace.*

Definice 1.14. Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$ je náhodný proces definovaný na $(\Omega,\mathcal{A},P)$ a nechť $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ je filtrace. Jestliže náhodná veličina X_t je $\mathcal{F}_t$-měřitelná pro každé $t \in T$, řekneme, že $\{X_t,\, t \in T\}$ je *adaptovaný* na $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$.

Definice 1.15. Nechť $\{X_t,\, t \in T\}$ je náhodný proces adaptovaný na filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ a $\mathrm{E}|X_t| < \infty$ pro všechna $t \in T$. Tento proces se nazývá *martingal* vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$, jestliže $\mathrm{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_t$ s. j. pro každé $s < t, s, t \in T$.

Poznámka 1.4. Jestliže $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ je σ-algebra generovaná náhodnými veličinami procesu do času t, potom $\{\mathcal{F}_t, t \in T\}$ se nazývá kanonická nebo přirozená filtrace. Pokud se hovoří jen o martingalu, většinou jde o právě o martingal vzhledem ke kanonické filtraci. Teorií martingalů se zabývá např. učebnice Štěpán (1987).

1.3 Cvičení a doplňky

Cvičení 1.1. Nechť $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin. Dokažte, že je striktně stacionární. Je také slabě stacionární?

Cvičení 1.2. Nechť $\{X_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ je posloupnost nekorelovaných náhodných veličin s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem. Dokažte, že je slabě stacionární. Je také striktně stacionární?

Cvičení 1.3. Nechť

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_t &= Y_1 + \cdots + Y_t, \quad t = 1,2,\ldots, \end{aligned}$$

kde $Y_1,Y_2,\ldots$ jsou nezávislé, stejně rozdělené náhodné veličiny s nulovou střední hodnotou a konečným kladným rozptylem. Dokažte, že posloupnost $\{X_t,\, t \in \mathbb{N}_0\}$ je Markovův řetězec. Spočtěte autokovarianční funkci této posloupnosti. Co lze říci o striktní, resp. slabé stacionaritě této náhodné posloupnosti ?