PŘEDPOKLADY ŽÁKA PRO ŘEŠENÍ ÚLOH Z MATEMATIKY

DIAGNOSTIKA PŘÍČIN NEÚSPĚCHU A NÁVRHY OPATŘENÍ K JEJICH ODSTRANĚNÍ

PETR EISENMANN A KOLEKTIV

KAROLINUM

Předpoklady žáka pro řešení úloh z matematiky
Diagnostika příčin neúspěchu a návrhy opatření k jejich odstranění

Petr Eisenmann a kolektiv

Recenzovaly:
doc. PaedDr. Mária Slavíčková, Ph.D.
prof. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Autoři:
Petr Eisenmann
Jiří Přibyl
Magdalena Krátká
Lucie Loukotová
Jiří Cihlář
Ondřej Pešout

Financováno Evropskou unií NextGenerationEU
Národní plán obnovy
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg.č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2023
Redakce Václav Hozman
Grafická úprava Jan Šerých
Sazba DTP Nakladatelství Karolinum
Vydání první

T A Č R

Monografie *Předpoklady žáka pro řešení úloh z matematiky* byla vytvořena se státní podporou Technologické agentury ČR v rámci Programu ÉTA 2, projektu TL02000200 – *Diagnostika příčin neúspěchů žáka při řešení úloh z matematiky a návrh opatření k jejich odstranění.*

ISBN 978-80-246-5582-6
ISBN 978-80-246-5669-4 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

OBSAH

/1/ Úvod

Řešení úloh je jednou z hlavních náplní výuky matematiky na základní a střední škole. Někteří žáci jsou úspěšní téměř vždy, jiní zase skoro nikdy, někomu vyhovují pouze úlohy, ve kterých se procvičují naučené algoritmy, jinému zase určité téma. Pro mnoho žáků jsou zakletým tématem geometrické konstrukční úlohy, jiní zase tápou v úlohách vyžadujících základní kombinatorické úvahy. Popsat předpoklady žáka k úspěšnému řešení matematických úloh je tedy velice těžký a komplexní úkol. A pokusit se je zjistit u konkrétního žáka, navíc relativně rychle a bez použití jiných odborností, jako je např. psychologie, zní přinejmenším troufale. Přesto se v knize, kterou držíte v ruce, o konstrukci diagnostického nástroje, který právě tyto předpoklady žáka zjišťuje, pokusíme.

Smysl tento úkol má – na rozdíl od nestabilních charakteristik jedince, jako například emocí či pozornosti, kolísá míra matematického výkonu a schopnosti se matematice učit v čase méně (Cígler, 2018; Nuutila et al., 2018; Roick & Ringeisen, 2018), a má tedy význam předpoklady žáka[1] k úspěš-

1 V celé publikaci používáme označení žák ve smyslu pedagogické kategorie, tj. označujeme tak žákyně i žáky. Termínem učitel pak označujeme profesní skupinu, tj. označujeme tak učitelky a učitele. Analogicky pak pro další kategorie, jako je např. experimentátor atp.

nému řešení úloh ve vyučovacím procesu zjišťovat. V minulosti byly podobné záměry cíleny především na vyhledávání matematicky nadaných žáků (např. Wagner & Zimmermann, 1986; Niederer et al., 2003). To naším cílem není. Zjišťovat předpoklady žáků k úspěšnému řešení úloh chceme u všech žáků, a to s cílem pomoci učiteli odstranit překážky, které žákům brání v úspěšném řešení úloh.

Publikace přináší ucelený popis výzkumu provedeného v rámci projektu Technologické agentury České republiky *Diagnostika příčin neúspěchu žáka při řešení úloh z matematiky a návrh opatření k jejich odstranění* realizovaného na Přírodovědecké fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem v letech 2019–2022.

Monografie obsahuje celkem sedm kapitol, které po úvodu a vymezení teoretických východisek přináší přehled osmi charakteristik (tzv. komponent) struktury popisujících předpoklady žáka k řešení úloh v matematice: *matematická citlivost, matematická tvořivost, čtenářská gramotnost, počtářská dovednost, pracovní paměť, tendence k užití algoritmu, sebeposouzení* a *motivace k učení se matematice*. Popsán je jak důvod jejich zařazení do vytvořené struktury, tak operacionalizace jejich diagnostiky. Hlavním výstupem projektu je totiž certifikovaná diagnostická sada (určená pro 8. či 9. ročník základních škol a odpovídající ročníky víceletých gymnázií), která učiteli umožní stanovit míru výše uvedených charakteristik u jejich různých proměnných (zadání testů diagnostické sady je přílohou této monografie). Tyto hodnoty mohou být vnímány jako východiska pro přijetí určitých opatření, která by měla vést ke zlepšení úspěšnosti žáka v řešení matematických úloh. Návrhy těchto opatření realizovatelných v běžné učitelské praxi pak popisuje šestá kapitola monografie, jíž ovšem předchází podrobný popis metodologie celého výzkumu, a především jeho výsledků včetně interpretace.

Teoretická východiska pro formulaci struktury, která popisuje předpoklady žáka k řešení úloh, jsme čerpali především ze závěrů výsledků základního výzkumu uskutečněného v rámci projektu Grantové agentury České republiky *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi* z let 2012–2014. Zde byla formulována tehdy čtyřprvková struktura zahrnující obecnou inteligenci, čtenářskou gramotnost, tvořivost a schopnost využívat stávající znalosti v matematice. Popsána je např. v (Eisenmann et al., 2015), kde je pro ni i zaveden název *Culture of problem solving* (CPS). Tento název a zkratku budeme i nadále používat pro označení struktury, která popisuje předpoklady žáka k řešení úloh. Proces změny a obohacení původní struktury CPS o výše již zmíněné nové komponenty popisující i metakognitivní dovednosti bude v knize dále zdůvodněn a popsán.

Multioborovost zkoumané problematiky koresponduje se složením autorského kolektivu, který sestává z didaktiků matematiky, statistiků a psychologa.

Kniha je určena nejen výzkumníkům v oblasti didaktiky matematiky a pracovníkům vysokých škol připravující budoucí učitele, ale i samotným učitelům a studentům učitelství matematiky. Jednotlivé kapitoly jsou přirozeně poměrně úzce provázány, žádnou z nich tedy nelze číst samostatně bez opory o některé jiné. Kniha je zakončena několika přílohami a seznamem elektronických příloh.

/**2**/

Úloha a proces jejího řešení

V rámci této kapitoly představujeme východiska, o která jsme se při vývoji diagnostické sady opírali. Protože se zabýváme žákovými dispozicemi k řešení matematických úloh, předkládáme svoje vymezení matematické úlohy a také nabízíme určitý pohled na proces jejího řešení.

Při popisu žáka z pohledu jeho předpokladů k řešení úloh se dotýkáme dvou základních oblastí, a to kognitivní a metakognitivní. V rámci každé z nich lze nahlížet na proces řešení úlohy svébytným způsobem. V rámci každé z těchto oblastí také sledujeme určité proměnné, o kterých se domníváme, že se přímo dotýkají žákovy dovednosti řešit matematické úlohy. Nicméně, chceme-li zlepšit žákovu dovednost řešit úlohy, je zapotřebí se zaměřit nejen na jeho dispozice, ale také na samotný proces řešení úlohy a uvědomit si, kdy jsou jednotlivé kroky řešení procesu závislé na zmíněných proměnných. Tím získáme určitou představu, ve které fázi procesu řešení úlohy žák je, a jak na žáka působit, aby vznikl potenciál dosáhnout požadované změny.

Věříme, že vhodným propojením níže představených modelů procesu řešení úlohy vzniká model, který propojuje obě oblasti – kognitivní i metakognitivní – z hlediska procesu řešení úlohy do jednoho organického celku. V prvním případě jde o pohled „z vnějšku“ na proces řešení úlohy, v našem prostředí bychom jej mohli označit za pohled učitele, a ve druhém případě jde o pohled „zevnitř“, který bychom mohli označit za pohled žáka.

2.1 MATEMATICKÁ ÚLOHA

Matematická úloha je do značné míry obecný pojem, jehož vymezení závisí na záměru, s jakým k úlohám přistupujeme. V naší práci se zaměřujeme na takové matematické úlohy, se kterými se žáci běžně setkávají ve výuce matematiky. I přesto je to však velmi bohatá množina, již se řada autorů snaží strukturovat a popsat ji v závislosti např. na možných komponentách samotné úlohy nebo v závislosti na míře autonomnosti řešitele při jejím řešení.

Např. Kopka (1999) a Kuřina (2011), který vychází z Vyšína (1972), uvádějí tři do značné míry podobné kategorie úloh zohledňující pozici řešitele:

- rutinní úloha (cvičení) – jde o úlohu, kde je řešiteli předem znám postup, případně je požadovaný postup přímo součástí zadání;
- nerutinní úloha, kde řešitel kombinuje více algoritmů;
- problémová úloha – jde o úlohu, kde postup řešení není řešiteli znám, a proto vyžaduje tvořivý přístup.

V naší studii uvažujeme o všech typech matematických úloh, tedy jak o úlohách, kde by postup měl být žákovi známý, tak o úlohách, které vyžadují jeho tvůrčí přístup. V následujícím textu budeme slovo úloha používat v tomto širším významu.

U samotných úloh pak můžeme nacházet určité složky či vnitřní strukturu, která je patrná bez ohledu na obsahové zaměření či obtížnost úlohy. Mareš (1980) na základě prací L. M. Fridmana uvádí čtyři složky úlohy: (a) předmětnou (věcnou) oblast danou objekty, o nichž úloha pojednává; (b) vztahy mezi těmito objekty; (c) požadavky a instrukce o cíli, resp. otázku a (d) operátor, tj. posloupnosti operací, jež je třeba vykonat.

Z hlediska požadovaného úkonu žáka lze najít typologii úloh např. u Polyi (2004), který rozlišuje úlohy (a) početní; (b) konstrukční; (c) určovací a (d) důkazové. Kuřina (2011) upřesňuje, že typ úlohy je dán „signálním slovem“ a přidává kategorii (e) rozhodovací.

Pozornost můžeme zaměřit také na samotné zadání. V běžném výukovém procesu se naši žáci setkávají s úlohami, které mají nejrůznější formu zadání. Jde jednak o úlohy aplikační (také reálné či praktické) a úlohy ryze matematické (Polya, 2004[2]; Fridman & Tureckij, 1989). Hejný et al. (1990), resp. Fridman a Tureckij (1989) rozlišují mezi úlohou standardní, která je uvozena jednoznačnou výzvou (např. řešte rovnici) a nestandardní (např. slovní nebo kombinatorická úloha).

2 Jedná se o přetisk 2. vydání z roku 1973 s novou předmluvou J. H. Conwaye. Nadále budeme čtenáře odkazovat na český překlad (Polya, 2016), který je pro něj dostupnější.

Z hlediska úplnosti zadání lze také úlohy rozdělit na (a) dobře zadané; (b) nedostatečně zadané a (c) přezadané. V tomto kontextu Fridman (podle Mareše, 1980) uvažuje o tzv. stupni určenosti úlohy, míře zobecnění a míře úplnosti úlohy.

Nakonec ještě zmiňme dimenzi náročnosti úlohy, která je dána předpokládanými nutnými znalostmi pro vyřešení úlohy. Ty samozřejmě souvisí s obsahovým zaměřením uvažované úlohy. Ve studii jsme se snažili obsáhnout celý obsah školské matematiky vymezený rámcovým vzdělávacím programem pro 2. stupeň základní školy (NPI, 2021) (dále jen RVP ZV).

2.2 MODEL ŘEŠENÍ MATEMATICKÉ ÚLOHY

Nejstarší pokusy o popis procesu řešení problému zaujímají makroskopický pohled. Deweyeho (1933) model je rozdělen do určitých kroků: (a) definování problému; (b) analyzování problému; (c) určení kritérií pro optimální postup řešení; (d) navržení různých řešení; (e) ověření navržených řešení; (f) výběr řešení a (g) návrh strategií pro další řešení. Na tento model řešení problému se odkazuje řada pozdějších autorů. Mezi nimi také Polya (2016) při vytváření modelu řešení matematické úlohy, který je popsán pomocí čtyř fází:

- porozumění podstatě úlohy;
- vypracování plánu postupu řešení;
- realizace plánu (řešení);
- zpětná kontrola.

Pro naše účely jsme se přichýlili k syntéze dvou přístupů – Reusserova (1985) didaktického přístupu a metakognitivního přístupu prezentovaného v (Prezl et al., 2003). Nově vytvořený model by měl umožnit nejen sledovat proces řešení úlohy, ale také na jeho základě tento proces ovlivňovat, a to ve sledovaných charakteristikách žáka (*matematická citlivost, matematická tvořivost, čtenářská gramotnost, pracovní paměť* a další), jejichž podstata není ani pouze didaktická, ani pouze metakognitivní.

Základní ideou je, že Reusserův model reprezentující didaktický pohled na situaci obohacujeme o prvky převzaté z modelu reprezentujícího metakognitivní pohled na situaci (Prezl et al., 2003). Je možné tuto situaci nahlížet tak, že se jedná o dvě dimenze sledovaného procesu. Dodejme, že Reusserův[3] model je modifikací již existujícího modelu Kintsche a Greena (1985).

3 Článek (Reusser, 1985) je inspirativní nejen tím, že popisuje samotný model, ale také úvahy, úskalí a otázky, které se objevily při jeho tvorbě.

2.2.1 REUSSERŮV MODEL ŘEŠENÍ (SLOVNÍ) ÚLOHY

Reusser (podle Vondrová et al., 2019, s. 18) představuje didaktický model procesu řešení úlohy. Ten sice primárně zpracovává proces řešení slovních úloh, avšak je dobře využitelný při popisu řešení matematické úlohy v obecném slova smyslu, protože stejné procesy jsou jednoznačně identifikovatelné i při řešení jakékoliv matematické úlohy. Reusserův upravený model sestává z pěti komplexních fází:

- (R1) Zpracování vstupu: Porozumění textu úlohy, ve zobecněném pohledu porozumění zadání.
- (R2) Vytvoření situačního modelu: Porozumění situaci, souvislostem a problému úlohy a generování otázky.
- (R3) Konstrukce matematického modelu: Matematizace situační představy. V případě numerického či algebraického kontextu probíhá ve dvou úrovních:
  - a) Žák vytváří nenumerický, ale již abstraktní model.
  - b) Žák vytváří numerický formální (algebraický) model.
- (R4) Provedení výpočtu, provedení konstrukce, resp. analogických procesů, které vedou ke konkrétnímu výsledku.
- (R5) Vytvoření odpovědi a interpretace výsledku na podkladu věcné představy problému.

2.2.2 METAKOGNITIVNÍ MODEL ŘEŠENÍ ÚLOHY

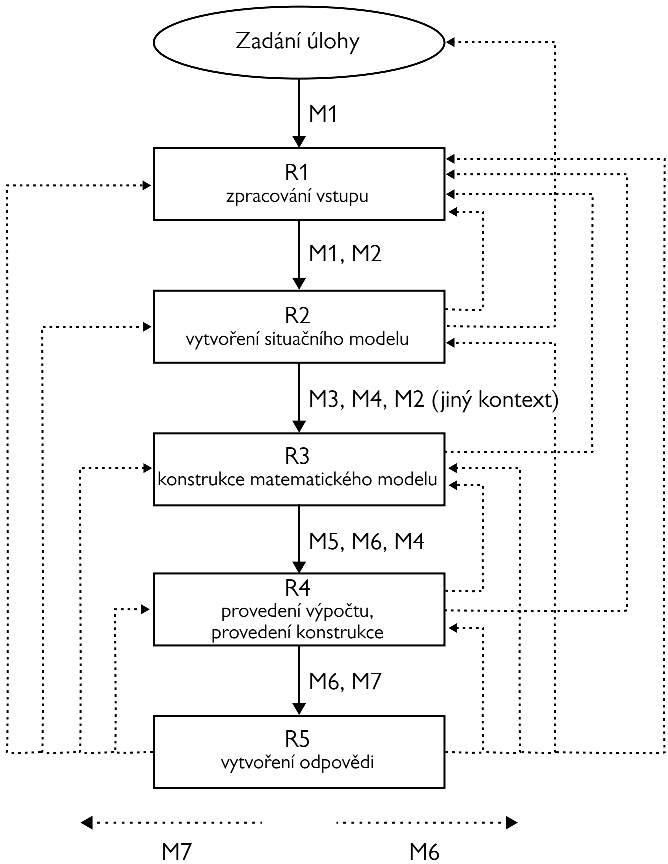
Tento pohled na proces řešení úlohy je nabízen psychology (Prezl et al., 2003). Upozorňují na skutečnost, že proces řešení úlohy je cyklické povahy – cyklů je či může být více, přičemž všechny fáze jednoho průchodu cyklu lze popsat následovně:

- (M1) Rozpoznat nebo identifikovat problém, obtíž či překážku v úloze.
- (M2) Mentálně vymezit a reprezentovat problém.
- (M3) Vytvořit si (navrhnout) strategii řešení úlohy a strategii řešení, tj. odstranění problému.
- (M4) Uspořádat si znalosti týkající se problému.
- (M5) Alokovat mentální i fyzické zdroje potřebné pro řešení úlohy.
- (M6) Reflektovat samotný průběh řešení a ověřovat, zda vede k cíli.
- (M7) Vyhodnotit řešení problému z hlediska očekávaného výstupu – přesnost, typ odpovědi apod.

Důležitým faktem je, že daný cyklus nemusí při svém průchodu obsahovat všechny fáze. V řadě případů je možné, že daný cyklus má jen dvě fáze. Druhou skutečností, na kterou upozorňujeme, je, že slova problém a úloha zde nevystupují synonymně. Úloha může mít více problémů – cílů, kterých se má dosáhnout, a také může mít problémy, které jsou vlastní danému řešiteli, tj. pro jednoho se jedná o obtíž, kterou musí odstranit, a pro jiného nikoliv.

2.2.3 SYNTETIZUJÍCÍ MODEL PROCESU ŘEŠENÍ ÚLOHY

Syntézou obou modelů vznikl model, jehož schéma předkládáme na obrázku 2.2.1. Tento model sleduje oba úhly pohledu a dává do určité interakce oba přístupy. Znovu připomeňme, že proces řešení úlohy obvykle není přímočarý. Žák průběžně provádí reflexi postupu řešení (M6), respektive vyhodnocuje (dílčí) výstupy (M7), včetně situace, kdy si neví rady, jak postupovat dál, a na základě toho se může rozhodnout vrátit se do kterékoli předchozí fáze R1–R5. Jinými slovy, proces řešení úlohy se může v jednotlivých fázích cyklit, přičemž právě tyto cykly jsou vyvolány žákem-řešitelem a on se tak znovu dostává do již dřívějších stavů řešení úlohy.



Obr. 2.2.1: Model procesu řešení úlohy

Poznamenejme, že některé fáze (jak z hlediska didaktického, tak z hlediska metakognitivního úhlu pohledu) uchopují učitelé vědomě. Například běžně vyzývají žáky, aby provedli sémantickou zkoušku, tedy srovnání výsledku řešení s kontextem zadání úlohy. Avšak stává se také, že je některé fáze dosaženo jen zdánlivě nebo formálně. Např. Novotná (2000) nebo Vondrová et al. (2019) poukazují na vedení žáků k tvorbě zápisu (nebo také legendy), přičemž učitelé to deklarují jako tvorbu situačního modelu, avšak žáci tuto fázi s porozuměním podstaty problému nijak nespojují. Podobně také Vondrová (2019) upozorňuje, že řada žáků sémantickou zkoušku spontánně neprovádí, resp. že ji nepovažují za nedílnou součást procesu řešení úlohy. Stejná situace může nastat například v případě diskuse geometrické úlohy a dalších.

Na závěr poznamenejme, že náš syntetizující model explicitně neřeší, jak jednotlivé fáze probíhají. Například u fáze R3 jsou zmíněny dvě úrovně – nenumerický a numerický (algebraický) model, které se mohou asociovat s určitým způsobem řešení. Už samotná fáze R2 může probíhat tak, že si žák v rámci tvorby situačního modelu nakreslí nějaký obrázek či schéma. Řekli bychom, že začíná úlohu řešit graficky. Na základě této kresby či schématu může žák získat vhled do úlohy, který Liljedahl (2005) označuje jako *moment osvícení*, a který umožní žákovi nejen přejít do další fáze, ale také mu umožní danou úlohu vyřešit. Stejně tak fáze R4 může probíhat za pomoci různých výpočetních strojů, počínaje obvyklými kalkulačkami, přes zapojení osobních počítačů a konče použitím SW jako je GeoGebra, Wolfram Alpha, nebo dokonce PhotoMath. V (Přibyl & Eisenmann, 2014) jsou tyto aspekty řešení úlohy vnímány jako určité rozměry celého procesu řešení úlohy. V našem výzkumu v tuto chvíli nehrají žádnou roli, neboť ten je zaměřen na odhalování obtíží žáka při řešení úloh, a různí žáci mohou mít rozdílné obtíže v rámci stejné fáze.

/3/ Předpoklady žáka k řešení úloh

Tato kapitola představuje jednotlivé komponenty struktury předpokladů žáka k řešení úloh (v kapitole 1 byla zavedena pro tuto strukturu zkratka CPS) a jejich vymezení. Konkrétně, v oddílech 3.2 až 3.9 jsou popsány jednak důvody zařazení každé z těchto komponent do struktury CPS, dále popis sledovaných proměnných a jejich operacionalizace. Jedinou výjimku tvoří úvodní oddíl 3.1, v němž objasňujeme, na které faktory ovlivňující dovednost žáka řešit úlohy se v našem výzkumu zaměřujeme, a na které naopak vědomě rezignujeme.

Každý z oddílů 3.2 až 3.9 je zakončen popisem vývoje příslušného testu výzkumné sady, neboť vhodně dokresluje obsah dané komponenty. Zde uvádíme i podrobný popis různých variant těchto testů (listinné A a B, elektronické, jejichž znění je elektronickou přílohou knihy[4]) s příslušným zdůvodněním. Na základě zpracování dat získaných během výzkumu došlo následně k úpravě těchto testů do podoby výsledné diagnostické sady, která je určena

4 Elektronické přílohy monografie jsou k nalezení na webové stránce: https://reseniuloh.ujep.cz/elektronicke-prilohy-monografie/

učitelům pro použití v praxi a o níž hovoří kapitola 6. Výsledná diagnostická sada je samostatnou přílohou monografie (P1). Rozdíly mezi výzkumnou sadou a výslednou diagnostickou sadou jsou popsány u jednotlivých komponent v kapitole 4 a souhrnně v úvodu kapitoly 6.

3.1 FAKTORY OVLIVŇUJÍCÍ DOVEDNOST ŽÁKA ŘEŠIT ÚLOHY

Je obecně přijímaným faktem, a multimédii často akcentovaným, že je matematika na základní škole vnímána jako obtížný a řadou žáků neoblíbený předmět (Pavelková & Hrabal, 2012). Dále se také ukazuje, že její obliba s rostoucím věkem žáků klesá (Smetáčková, 2018). Otázkou pak je, co způsobuje tyto postoje žáků.

Jak uvádí Mullis et al. (2012, s. 19), pravidelně se opakující výzkumy ukazují, že existuje přímá souvislost mezi oblibou předmětu matematika u žáků a jejich úspěšností v tomto předmětu. Vzhledem k povaze výuky matematiky na základní škole je zřejmé, že školní úspěšnost hodnocená známkou se opírá především o řešení rutinních, ale v některých případech i nerutinních, úloh.

Je tedy nasnadě otázka: „Co ovlivňuje úspěšnost žáka při řešení úloh v matematice?“ Dlouhodobě nabízených odpovědí je celá řada. Nejprve se společně podívejme na některé dříve nabízené odpovědi, které nám umožní zasadit sledovanou problematiku do určitého rámce, a umožní tak čtenáři nahlédnout, jak obsáhlá sledovaná problematika je.

Samotné faktory, které ovlivňují proces řešení úlohy, můžeme rozdělit do několika základních skupin, přičemž tyto skupiny se vzájemně ovlivňují.

První skupina je tvořena úlohami jako takovými. Problematice úloh a procesu jejich řešení jsme se věnovali v kapitole 2.

Druhá skupina je tvořena vnitřním světem řešitele, tj. jeho předpoklady k řešení úloh. Sem spadá např. kognitivní inteligence, tvořivost, motivace, kognitivní struktura, zkušenost, schopnost pozorovat, citlivost k výzvám atp. Do této skupiny však spadají i různé handicapy, jako např. dyskalkulie či dyslexie.

Třetí skupina je tvořena vnějším světem řešitele, kam spadá např. zdravotní stav řešitele, fyzické prostředí a jeho změny, didaktické a školní faktory nebo sociálně-kulturní klima, ve kterém se řešitel krátkodobě, ale i dlouhodobě nachází. Může se například jednat o vyloučenou lokalitu nebo naopak o podnětné prostředí.

Lze říci, že námi představené rozdělení faktorů je určitou analogií k Popperově ideji tří světů (Hejný & Kuřina, 2000).

Dovednost řešit úlohy je komplexní soubor faktorů daného jedince, které se podílejí na procesu řešení úlohy, jsou vlastní danému jedinci a mohou se vzájemně ovlivňovat. Vznikají teorie, které se snaží danou problematiku popisovat a obvykle konstruují modely, které umožní i predikovat změnu dovednosti řešit úlohy v matematice. Nyní si představíme některé z nich.

Schoenfeld (1992) vymezil rámec několika faktorů majících vliv na dovednost žáka řešit úlohy. Tyto faktory rozdělil do čtyř základních skupin:

1. zdroje – jsou formální (získané cíleným učením) i neformální (získané nesystematicky, mnohdy útržkovité) znalosti o faktech a také naučené algoritmy či rutinní postupy;
2. heuristiky – jsou určitá pravidla či postupy, jak postupovat při řešení nerutinních úloh;
3. kontrolování – jsou metakognitivní znalosti toho, jak pracovat se zdroji a heuristikami;
4. přesvědčení – jsou postoje žáků ke světu včetně sebe sama.

Některé modely se více zaměřují na sociální aspekty ovlivňující řešení úloh a také jejich vzájemnou interakci. Jeden z přijímaných modelů popisují Pimta et al. (2009), přičemž autoři se zaměřili na tyto proměnné:

- soustředění;
- postoj k matematice;
- motiv úspěchu;
- sebehodnocení;
- chování učitele.

Jejich model rozšiřují Guven a Cabakcor (2013), kteří přidávají další aspekty, mající přímý i nepřímý vliv na úspěšnost při řešení matematických úloh:

- dosažené vzdělání rodičů;
- dílčí hodnocení (žáka) v průběhu studia i v jiných předmětech;
- předchozí dosažené vzdělání (žáka).

Výzkum prezentovaný ve studii (Setyadi et al., 2019) se zabývá vztahem dovednosti řešit matematické úlohy, popsaným pomocí modelu IDEAL, a osobnostním typem jedince. Výsledky výzkumu ukazují, že extroverti bývají úspěšní ve volbě řešitelské strategie i při samotném procesu řešení, popř. při interpretaci získaných výsledků. Naopak introvertně orientovaní jedinci jsou úspěšnější při rozboru úlohy, který může spočívat v identifikaci problému, či nalezení, v čem spočívá obtížnost úlohy, nebo při odhalování různých proměnných dané úlohy.

Wu a Adams (2006) modelují kognitivní procesy, které se zapojují v rámci řešení úlohy. Jejich model pracuje s vícedimenzionálním IRT[5] modelem (Linden & Hambleton, 1997). Na základě výzkumu identifikují čtyři základní dimenze řešení úloh:

- čtení/získávání informací ze zadání;
- osobní zkušenost a obecně přijímaný přístup k řešení úloh;
- znalosti matematických konceptů, matematizace a zdůvodňování;
- výpočetní zručnost a pečlivost při provádění výpočtů.

5 IRT – *Item Response Theory*

Zmíněný výzkum koresponduje s východisky, na nichž jsme po skončení základního výzkumu (projekt Grantové agentury České republiky *Rozvíjení kultury řešení matematických problémů ve školské praxi*) formulovali první verzi struktury CPS. Nicméně ani stanovení dimenzí, které mají popsat žákovu zdatnost při řešení úloh, není dostatečným nástrojem pro odhalení základních slabin žáka při řešení úloh.

Jak vyplývá z úvodních pasáží tohoto oddílu, je zřejmé, že sledovaná problematika je poměrně obsáhlá. My jsme se v našem výzkumu zaměřili na studium faktorů, které spadají do vnitřního světa řešitele. Chceme-li popsat žákovy předpoklady k řešení úloh, je zapotřebí o něm sesbírat dostatečné množství informací, tyto informace uspořádat a vyhodnotit. Jsme si vědomi toho, že učitel tyto informace o žákovi obvykle má, nicméně až po delší době, kdy žáka pozná v různých situacích.

Jak již bylo zmíněno, mít možnost nahlédnout žákovy nedostatky v relativně krátké době může být velkou výhodou pro další pedagogické působení učitele, kdy cílená pomoc může usnadnit odstraňování překážek spojených s řešením úloh. Platí však, že znalost těchto překážek je výchozím bodem a žák bude muset urazit poměrně dlouhou cestu, než se mu podaří některé překážky odstranit.

Právě pro popsání žáka z pohledu jeho předpokladů k řešení úloh jsme vyvinuli strukturu, která má tyto předpoklady popsat. Vzhledem k tomu, kolik lze sledovat proměnných ovlivňujících žákův výkon, je zřejmé, že samotná struktura CPS tak může být poměrně rozsáhlá.

Naší snahou bylo koncipovat strukturu CPS tak, abychom mohli vhodně navrhnout diagnostickou sadu, která sesbírá nutné informace. Při sestavování struktury CPS a navrhování její operacionalizace jsme se řídili následujícími kritérii:

- každá komponenta struktury CPS se musí prokazatelně podílet na řešení úloh, které jsou obvyklé u sledované skupiny žáků;
- samotný sběr dat (testování pomocí diagnostické sady) musí být realizovatelný hromadně – tedy diagnostická sada by měla umožňovat screening všech přítomných žáků najednou;
- samotný sběr dat se musí dát realizovat v relativně krátkém časovém úseku – naše představa odpovídá dvěma až třem vyučovacím hodinám;
- administrace samotného sběru dat musí být realizovatelná učitelem, bez nějakého speciálního školení, bez zapojení dalších subjektů;
- vyhodnocení sebraných dat by měl být schopen provést samotný učitel bez přítomnosti další, v tuto chvíli pomáhající, profese;
- sběr dat i jejich zpracování by měly být do určité míry zautomatizovatelné;
- výsledky screeningu by měly být takové, aby poukázaly na základní problémy u žáků, kterých si učitel nemusí být vědom;
- interpretace výsledků by měla umožnit určité seskupení žáků tak, aby učitel mohl cíleně pro danou skupinu navrhnout patřičné

opatření – tímto je myšleno, že ve třídě s 27 žáky by nemělo vzniknout 27 skupin, ale např. šest skupin, se kterými učitel může dále pracovat.

Stručně řečeno, učitel by měl být schopen během několika málo vyučovacích hodin provést samotné testování, dále by měl být schopen data vyhodnotit a i interpretovat, a to bez pomoci psychologa či sociologa.

Jsme si plně vědomi toho, že při koncipování struktury CPS jsme museli učinit několik kompromisních rozhodnutí tak, abychom naplnili výše uvedená kritéria. Pro potřeby výzkumu popsaného v této monografii je struktura CPS tvořena těmito komponentami:

- matematická citlivost;
- matematická tvořivost;
- počtářská dovednost;
- čtenářská gramotnost;
- pracovní paměť;
- tendence k užití algoritmu;
- sebeposouzení;
- motivace k učení se matematice.

Tyto komponenty budou v následujících osmi oddílech podrobně představeny. Zastavme se ale ještě před tím u toho, co ve struktuře CPS naopak nenajdeme.

Může být na první pohled překvapující, že ve výše uvedeném výčtu chybí slovo inteligence. Přestože bylo dlouho přijímaným faktem, že vyšší míra obecné inteligence koreluje s dovedností řešit úlohy v matematice, není možné takto zjednodušující tvrzení přijmout (Wenke et al., 2005). V prvé řadě stanovit míru obecné inteligence není úplně jednoduché a smí ho provádět pouze psycholog. Toto stanovení je závislé na použitém testu, přičemž některé dlouhodobě používané testy, např. Stanfordův-Binetův test, velmi dobře predikují akademickou úspěšnost jedince (Ackerman & Beier, 2005), avšak nevypovídají o tom, která složka obecné inteligence se přímo podílí na řešení úloh. Vzhledem k modelu, který jsme ohledně vymezení inteligence přijali (viz oddíl 3.2), jsme se rozhodli na obecnou inteligenci jako takovou rezignovat. Rizika, která jsou spojena s nevhodnou interpretací výsledků, jsou příliš veliká (např. Gould, 1998).

Do stejné kategorie také patří tvořivost jako taková. Existuje celá řada testů tvořivosti, přičemž pouze odborník – obvykle psycholog – je schopen stanovit, který z testů je vhodný a je také schopen správně interpretovat získaná data (Said-Metwaly et al., 2017). Jsme si vědomi faktu, že tvořivost je nedílnou součástí řešení reálných problémů i teoretických úloh. Některé teorie přímo propojují tvořivost s vývojem člověka jakožto jedince i s vývojem člověka jakožto druhu, objevováním, překonáváním obtíží spočívajících v řešení problémů, popř. s řešením matematických úloh (Cropley, 2019). Je třeba také říci, že pohledů na tvořivost je více a Leikin a Sriraman (2017) vnímají tvořivost jako atribut matematického nadání. Nejen vzhledem k různorodosti pojetí, ale i vzhledem k tomu, že testů tvořivosti je poměrně dost, mají různou administraci a jejich smysluplné vyhodnocení je vázáno na neučitelské profese, jsme od testování obecné tvořivosti upustili.

Upustili jsme také od zjišťování pozornosti a úrovně soustředění. Jsme si plně vědomi faktu, že se jedná o velmi důležité proměnné v oblasti řešení úloh (Wiley & Jarosz, 2012), obzvláště ve spojení s pracovní pamětí (ta ale ve výčtu sledovaných komponent nechybí), neboť jsou na ni navázané (Swanson, 2011). Nicméně, jak pozornost, tak soustředění jsou ovlivněné celou řadou faktorů jedince a je obtížné je hromadně, tj. skupinově, měřit.

Od některých z proměnných, které jsou v zahraničí vnímány jako důležité, také odhlížíme, neboť nemají v naší malé republice místo. Vycházíme z předpokladu, že vzdělání je všem žákům dostupné na stejné úrovni, a sociálně-kulturní prostředí je pro žáky také všude obdobné.

3.2 MATEMATICKÁ CITLIVOST

Zatímco ve většině školních předmětů na sebe výuková témata navazují a výuka tato témata buď rozšiřuje, nebo prohlubuje, v matematice můžeme získat dojem, že se žák setkává s celou řadou navzájem oddělených témat, která spolu zdánlivě nesouvisí. Není předmětem tohoto oddílu obhajovat soudržnost celku či jeho uspořádání, ale poukázat na určité faktory, které se mohou podílet na úspěšnosti žáků při řešení standardních, tj. ve škole předkládaných, úloh.

Při zkoumání vybraných faktorů, které se podílejí na úspěšnosti žáků, se nemůžeme vyhnout ani samotnému obsahu, který se na základní škole vyučuje. Jistě ze svého okolí známe jedince, kteří o sobě prohlašovali, že „si neumí ‚něco' v geometrii představit", jiní, i přes veškerou snahu učitele, odolávají intuitivnímu pochopení zobrazení (ve smyslu funkce), popř. jsou tací, kteří se domnívají, že když desetkrát za sebou na šestistěnné kostce padla šestka, tak pravděpodobnost, že padne znovu, je velmi, ale opravdu velmi malá.

Při bližším zkoumání se ukazuje, že existuje určitá citlivost vůči matematickým jevům. Snaha tuto citlivost měřit a dále s ní pracovat vedla k vytvoření konceptu *matematické inteligence* (např. Juter & Sriraman, 2011). Nicméně, při jeho vymezení nepanuje shoda a ani my nenabízíme sjednocující pohled. To je také důvod, proč jsme se nakonec rozhodli zavést pojem *matematická citlivost*. Podívejme se nejprve, jak se k matematické inteligenci staví jiní. To nám umožní nahlédnout celou problematiku ze širšího úhlu pohledu, což považujeme nejen za užitečné, ale i za nezbytné z důvodu dalšího pochopení výsledků naší práce.

První teorii, kterou zmíníme, je *teorie mnohočetné inteligence* (Gardner, 1999, 2011; Straka et al., 2014). Oproti dříve přijímaným teoriím o obecné inteligenci je tato založena na předpokladu, že jednotlivým ‚inteligencím' odpovídají jednotlivé oblasti v mozku. Z toho důvodu Gardner vyčleňuje prostorovou inteligenci od logicko-matematické[6] a zabývá se jimi odděleně. *Logicko-matematickou inteligenci* vnímá jako určitou citlivost k logickým a číselným vzorům a zároveň jako schopnost řetězit logické úsudky do větších celků. Samotné počítání pak je příkladem řetězení logických úsudků v aritmetickém kontextu. *Prostorovou inteligencí* pak popisuje správnost vnímání vizuálně-prostorových objektů a také schopnost si tyto objekty vybavit (představit), i když vjem již nepůsobí, či schopnost manipulovat s těmito představami. Gardner (1999, s. 90) také specifikuje, co vlastně míní slovem inteligence:

> „[Inteligence má] umožňovat vyřešení skutečných problémů a těžkostí, se kterými se [člověk] setkává, a v případě potřeby udělat něco účinného, avšak musí také obsahovat potenciál pro nalézání nebo vytváření problémů, čímž položí základ pro získávání nových vědomostí.“

V dnešní době je idea Gardnera podrobována kritice, avšak z praktického pohledu učitele má stále co nabídnout (Straka et al., 2014).

Zatímco Gardner opustil ideu obecné inteligence jako celku, jiní se domnívají, že jedinec kromě obecné inteligence (zastřešující celek) má i dílčí – doménové inteligence. Nicméně, základním problémem odlišení obecné inteligence od doménové je, že při měření obecné inteligence se používají testy, které také měří inteligenci doménovou – konkrétně matematickou (popř. logicko-matematickou) (Juter & Sriraman, 2011). Jako příklad lze uvést Stanfordův-Binetův test (Roid & Barram, 2004).

Obdobných přístupů bychom našli ještě několik. Například Z. Usiskin (Juter & Sriraman, 2011, s. 50) pracuje s pojmem matematická inteligence, přičemž představuje hierarchický model o osmi úrovních. Nicméně tyto přístupy mají obvykle společné to, že se snaží měřit matematickou inteligenci, popř. obecnou inteligenci, za účelem hledání žáků nadaných na matematiku, což není naším cílem.

Přestože výše uvedené teorie jsou vhodným východiskem a my jsme se jimi nechali ovlivnit, nelze je převzít tak, jak jsou. Co tedy je předmětem zkoumání této komponenty?

Pomocí *matematické citlivosti* se snažíme popsat žáka z hlediska jeho uchopování různých matematických obsahů, což je např. porozumění vztahu mezi objekty, znalost určitého postupu a schopnost argumentace, které považujeme za klíčové znalosti a dovednosti při řešení školních matematických úloh. Náš nástroj má za cíl screeningově odhadovat míru *matematické citlivosti* žáka.

Při výběru proměnných, které sledujeme v rámci komponenty *matematická citlivost*, jsme se řídili několika pravidly:

1. Proměnná se musí prokazatelně podílet na řešení úloh, které jsou obvyklé u dané skupiny respondentů.

6 Gardner uvádí celkem sedm různých inteligencí: logicko-matematická, prostorová, lingvistická, hudební, tělesně-kinestetická, intrapersonální a interpersonální. Vzhledem k meritu věci se však omezíme pouze na první dvě.

2. Proměnná musí být snadno měřitelná. Příkladem takové proměnné, která je naopak obtížně měřitelná, je citlivost ve vnímání nekonečna.
3. Proměnná nesmí být příliš specifická. Příkladem takové příliš specifické proměnné je citlivost vůči Dirichletovu principu[7].
4. Proměnná musí být měřitelná na dané skupině respondentů. Náš vzorek byl tvořen žáky 8. a 9. ročníku základní školy. Příkladem takové proměnné, která je obtížně měřitelná na dané skupině respondentů, je citlivost vůči spojitosti funkce.
5. Měření proměnných musí být zvládnutelné v daném časovém limitu.

Samotný výběr proměnných prošel několika iteracemi. V rámci komponenty *matematická citlivost* bylo sledováno šest proměnných:

- *funkční myšlení*;
- *geometrická představivost*;
- *jednoznačnost řešení*;
- *kombinatorické myšlení*;
- *vnímání příčinnosti*;
- *citlivost ke vzorům*.

Jsme si vědomi toho, že jednotlivé proměnné netvoří vyčerpávající strukturu, ale spíše různorodou směs. Vybrané proměnné nejsou ve vyvinutém testu zastoupeny stejnou měrou, tedy na jednotlivé proměnné usuzujeme z různého počtu úloh a těmto úlohám přikládáme různou váhu.

Výčet proměnných není vyčerpávající, jedná se o jejich zúžený výběr. Přesto se domníváme, že takto zúžená množina proměnných umožňuje, alespoň z části, popsat žákovu citlivost k těm matematickým jevům, jejichž správné vnímání je předpokladem úspěšného řešení úloh. Vzhledem ke dříve zmíněným požadavkům, které klademe na samotný proces testování (především hromadná a snadná administrace testování a nízká časová náročnost testování), nepovažujeme tuto redukci za limitující, ale naopak, považujeme ji za určitý makroskopický pohled na žáka, který se zaměřil ne na všechny možné fenomény, ale na ty, které se do značné míry podílejí na řešení úloh.

V tuto chvíli je na místě zodpovědět otázku, na které proměnné se nedostalo a proč. Příkladem takové obtížně měřitelné proměnné je *vnímání nekonečna*. A to nejen proto, že se tato proměnná v různých kontextech projevuje různě. Navíc je její zjišťování obtížně popsatelné kvantitativními nástroji. Stejně tak *citlivost k existenci řešení,* která zahrnuje jednak dovednost hledat více, nebo všechna řešení i porozumění situaci, kdy úloha řešení nemá, je poměrně problematicky měřitelná. Přestože jsme si plně vědomi faktu, že se jedná o velmi důležitý fenomén ve vzdělávání žáků, tak se v rámci předvýzkumu ukázalo, že se jedná o problematiku vhodnou spíše pro věkově starší vzorek.

7 Základní idea Dirichletova principu (někdy též přihrádkového či holubníkového principu) spočívá v jevu, že máme-li n přihrádek a $n + 1$ předmětů, potom v alespoň jedné přihrádce jsou alespoň dva předměty.

Stejně tak testování analogického myšlení, které je velmi důležité při řešení úloh, je jednoznačně kvalitativní záležitostí. Přepínání mezi různými kontexty nebo přeformulovávání jsou specifickými příklady analogického myšlení. Do této oblasti také spadá vytváření vhodných obrázků či schémat, které ilustrují podmínky ze zadání úlohy. Přestože se jedná z hlediska řešení úloh o zásadní dovednost, tak operacionalizace proměnných, které jsou spjaté s touto dovedností, je poměrně náročná, neboť by se jednalo o kvalitativní analýzy.

Obecně lze říci, že proměnných, které se dají analyzovat pouze kvalitativně, je více. Např. deduktivně-induktivní a induktivně-deduktivní usuzování jsou takovými proměnnými. Ve snaze obejít potřebu kvalitativní analýzy je možné sestavit i příslušné testy, které by se daly hromadně administrovat, avšak jednalo by se o testy poměrně obsáhlé, které by výrazně překročily časový rámec.

Jistě čtenáře, stejně jako nás, napadne celá řada dalších proměnných či fenoménů, které bychom za proměnné mohli považovat. Výše uvedené proměnné, kterými se ve své práci zabýváme, jsou sice kompromisním řešením, ale mají umožnit určitý makroskopický pohled na *matematickou citlivost*. Pokud se ukáže, že žák má určité nedostatky v těchto proměnných, pak stojí za úvahu, zda ho podrobit specifičtějšímu šetření, které se zaměří na další možné proměnné. To však není předmětem aktuální diagnostické sady.

Při tvorbě testu jsme postupovali způsobem, že na jednu proměnnou chceme usoudit z několika testových položek a naopak, jedna testová položka se může dotýkat více proměnných. Nyní si představíme jednotlivé proměnné komponenty *matematická citlivost*.

3.2.1 FUNKČNÍ MYŠLENÍ

Základní idea této proměnné vychází z původního vzdělávacího plánu *Meraner Lehrplan* navrženého skupinou vedenou F. Kleinem, tedy že funkční myšlení je určitým sjednocujícím principem výuky matematiky (Krüger, 2019). Autory vymezené funkční myšlení je pak vnímáno jako uvědomování si závislosti dvou entit nezávisle na kontextu. Takto obecně vymezené funkční myšlení je obtížně měřitelné, a proto jsme přijali zúženější formu, která nejen že více odpovídá dnešnímu chápání funkcí, ale také dobře reprezentuje celkovou ideu.

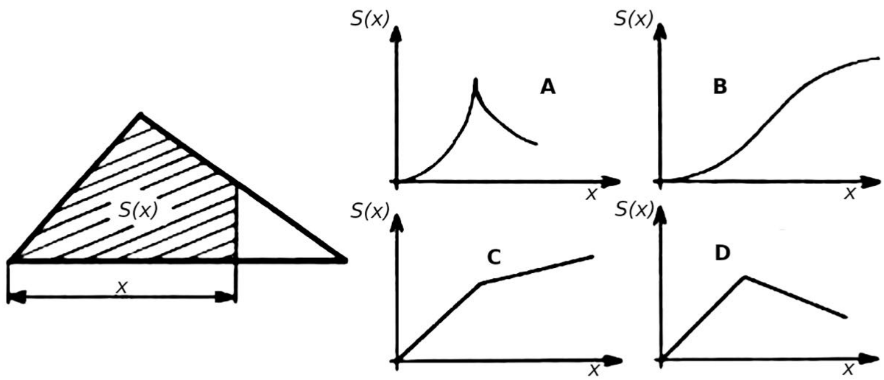
Funkční myšlení vnímáme jako určitý předstupeň obecnějšího algebraického myšlení (Smith, 2008). Základní podstatou funkčního myšlení je vztah mezi dvěma určitými veličinami, který Blanton a Kaput (2005) označují jako „pravidlo korespondence“. Eisenmann a Kopáčková (2006) pak hovoří o „fenoménu závislosti“, přičemž uvádějí fakt, že důležitější je právě vnímání fenoménu závislosti, oproti formálnímu budování pojmu funkce. Nejen výzkumy (McEldoon & Rittle-Johnson, 2010), ale i kurikulární dokumenty (NCTM, 2000) pracují s faktem, že citlivost k fenoménu závislosti:

1. není stabilní v čase, ale naopak se vyvíjí;
2. je možné vhodným působením měnit, v některých případech dokonce výrazně.

V rámci našeho výzkumu vymezujeme funkční myšlení jako citlivost vůči jevům založeným na vnímání závislosti.

Ilustrujme nyní vhodnou úlohou, jakým způsobem se projevuje funkční myšlení.

Zadání: Podívejte se na obrázek 3.2.1. V levé části je trojúhelník, který postupně šrafujeme. V pravé části máme čtyři grafy, označené A–D. Jeden z grafů A až D vyjadřuje závislost obsahu $S(x)$ vyšrafované části na vzdálenosti x. Označte jej.



Obr. 3.2.1: Zadání úlohy o závislosti obsahu $S(x)$ na velikosti x (Eisenmann & Kopáčková, 2006, s. 4)

Úloha je svojí povahou vhodná spíše do 9. ročníku základní školy, respektive do kvarty osmiletých gymnázií. Odpovědi žáků si můžeme rozdělit do dvou základních skupin a každou skupinu pak dále dělit.

První skupina je tvořena grafy B a C a pracovně ji označujeme jako ‚ideově správná odpověď'. Jde o to, že žák si uvědomí, že se vzrůstající vzdáleností x se také zvětšuje obsah vyšrafované plochy. V rámci první skupiny pak můžeme odpovědi rozdělit na B – zcela správná odpověď, kdy si respondent uvědomí, že přestože se jedná o trojúhelník – tedy útvar lineárně ohraničený, tak obsah se mění plynule. Druhou možností je pak C, kdy žák dojde k přesvědčení, že právě ve vrcholu trojúhelníku se skokově mění rychlost zvětšování obsahu.

Druhá skupina je pak tvořena grafy A a D a pracovně tuto skupinu označujeme jako ‚ideově pochybená odpověď'. Jde o to, že se respondent domnívá, že obsah se od jistého bodu zmenšuje. U varianty D zřejmě také dochází k záměně grafu funkce s obrázkem trojúhelníku.

Je možné uvažovat o situaci, kdy žák „intuitivně cítí" závislost. Při volbě grafu A (popř. D) se může domnívat, že graf např. vyjadřuje rychlost růstu obsahu. Nicméně dlouhodobá zkušenost ukazuje, že tato volba není podložená např. nízkou úrovní čtenářské gramotnosti, kdy žák neumí získat informace z grafu, ale právě určitou nedostatečností ve funkčním myšlení. Žák vůbec neporozuměl tomu, co daný graf jako schéma říká a nevnímá rozdíl mezi nezávisle a závisle proměnnou.

Na základě této úlohy bychom mohli, čistě hypoteticky (neboť na základě jedné úlohy by to bylo velmi diskutabilní), žáky rozdělit do tří základních skupin:

- Žák s vysokou citlivostí vůči jevům založeným na závislosti – zvolil graf B.
- Žák s uspokojivou citlivostí vůči jevům založeným na závislosti – zvolil graf C.
- Žák s nízkou citlivostí vůči jevům založeným na závislosti – zvolil odpověď A či D.

Jak je uvedeno výše, zmíněná úloha je určená spíše pro 9. ročník základních škol, kdy mají žáci již za sebou seznámení se s grafickou reprezentací závislosti. V nižších ročnících, před zavedením grafů funkcí, by se dala daná úloha řešit v dialogu se žákem, kde bychom mohli vhodnými otázkami zjišťovat míru jeho funkčního myšlení na základě jeho argumentace.

Ilustrujme situaci ještě jiným typem úlohy, při jejímž řešení se projeví určitá citlivost vůči jevům založeným na závislosti.

Zadání: Adam i Karel si uložili peníze do kouzelné banky. Adam do banky uložil 10 000 Kč a Karel uložil 20 000 Kč. Banka každý rok zdvojnásobila to, co bylo na účtu. Tedy pokud na účtu během roku bylo 100 000 Kč, tak banka tuto částku zdvojnásobila a na konci roku zde bylo 200 000 Kč.

1. Urči poměr částek, které vložili Karel a Adam (Karel : Adam).
2. Jak se bude tento poměr měnit v závislosti na čase?

   (a) Zmenšuje se. (b) Nemění se. (c) Zvětšuje se.

V tuto chvíli je zřejmé, že nabízených odpovědí je méně a je zde riziko, že respondent správnou odpověď uhádne bez porozumění problematice. Z toho důvodu je vhodné zařazovat více úloh tohoto typu do jednoho testu.

Tato úloha však rozřazuje respondenty pouze do dvou základních skupin:

- Žák citlivý vůči danému jevu (odpověď b).
- Žák necitlivý vůči danému jevu (odpověď a či c).

Při stanovování celkové hodnoty této proměnné se pak jednotlivým testovým položkám přiřazuje určitá váha podle toho, jakou měrou se podílí na stanovení citlivosti vůči fenoménu závislosti.

3.2.2 GEOMETRICKÁ PŘEDSTAVIVOST

Postavení této proměnné v rámci sledované komponenty je jiné, než je tomu v případě zbývajících proměnných. Při její konstrukci se vycházelo z prostorové inteligence (Gardner, 1999, 2011), která je vázána na jiná centra v mozku než ostatní proměnné této komponenty. Nicméně z dalšího vymezení bude zřejmé, že se tento pojem nepřekrývá s naším pojetím geometrické představivosti.

Pojmem *představivost* budeme ve shodě se Sternbergem (2002) rozumět mentální reprezentace těch věcí (předmětů, událostí, scenerií apod.), které v okamžiku reprezentace nejsou vnímány smyslovými orgány, přičemž představivost může reprezentovat i věci, s nimiž jsme se smyslově nikdy nesetkali.

Geometrická představivost v našem pojetí pokrývá dvě základní oblasti:

- představivost v rovině;
- představivost v prostoru.

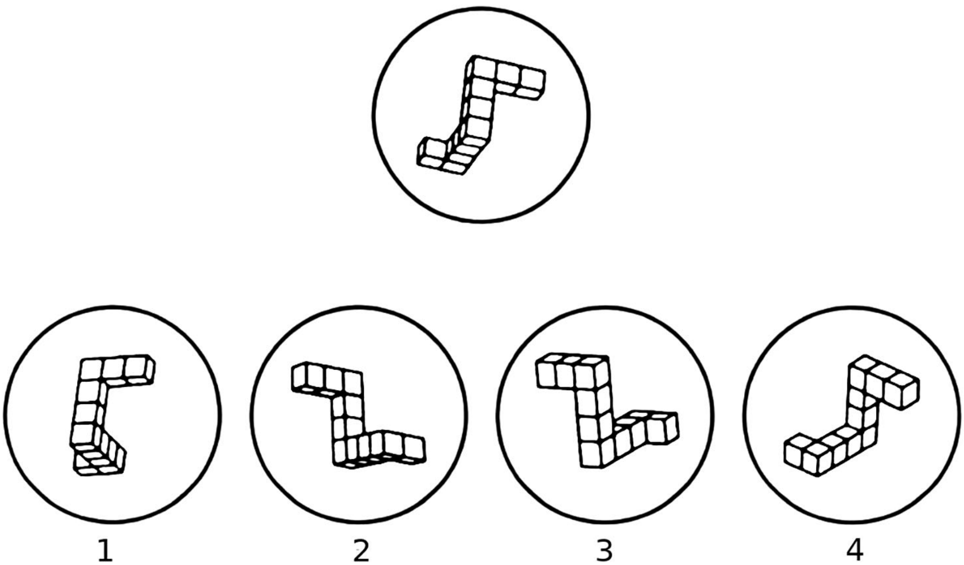
Základní idea je v obou případech stejná a pokrývá následující jevy:

- vybavit si daný objekt, i když samotný vjem již nepůsobí;
- vybavit si daný objekt a být schopen popsat vlastnosti daného tělesa;
- provést mentální manipulaci, spočívající v otáčení či jiné transformaci daným objektem jako celkem;
- provést mentální manipulaci, spočívající v rozložení či jiné transformaci daného objektu, přičemž dochází ke změně tvaru daného objektu, např. převod u tělesa ve 3D na jeho síť ve 2D.

Jak uvádějí výzkumy (Molnár et al., 2006; Perný, 2004), geometrickou představivost je možné pozitivně ovlivňovat.

V rámci našeho screeningu opět nesledujeme celou oblast, neboť je poměrně obsáhlá, ale zaměřili jsme se pouze na vybrané aspekty. Za základní předpoklady úspěšného řešení úloh považujeme především dovednost manipulovat s objekty ve své mysli. Zajímá nás tedy dovednost mentálního pohybu s daným objektem ve 3D. Typickou úlohou je následující problém:

Zadání: Rozhodni, který z objektů 1 až 4 (viz obr. 3.2.2) vznikl libovolným otočením objektu nahoře.

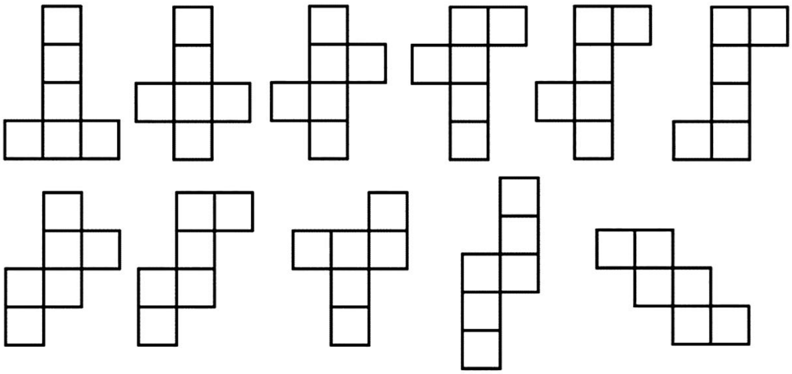


Obr. 3.2.2: Zadání úlohy na otáčení v prostoru (upraveno z Shepard & Metzler, 1971, s. 702)

Stejně tak vhodnou úlohou pro zkoumání prostorové představivosti je rozkládání prostorového objektu do sítě.

Zadání: Je dána krychle. Načrtni všechny její sítě.

Řešení (viz obr. 3.2.3) je převzato z (Hýsková, 2017).



Obr. 3.2.3: Řešení úlohy – všechny sítě krychle (Hýsková, 2017, s. 20)

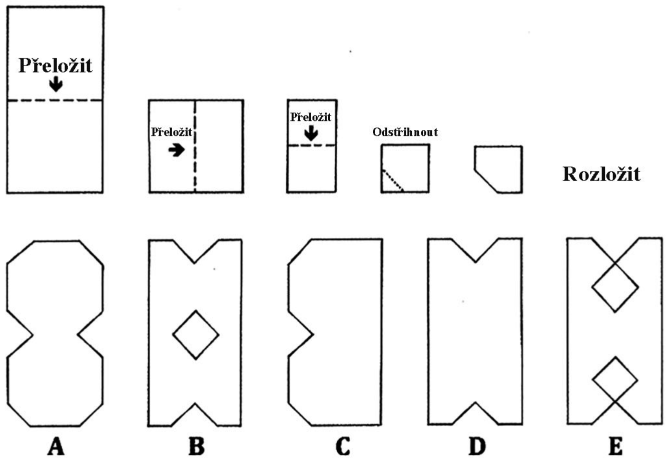
Zadání úlohy má několik „vrstev“, o kterých stojí za to uvažovat.

1. Úloha byla zadána jako otevřená. V některých případech je možné zadávat úlohu s nabídkou odpovědí, např. „Z následujících obrázků vyber sítě krychle.“.
2. Úloha byla zadána bez ilustrativního obrázku. Tedy respondent si musí danou krychli nejprve vybavit. Úlohu je možné zadat s ilustrativním obrázkem nebo je možné doplnit ji i o model (papírový, dřevěný, …).
3. Respondent je vybídnut k tomu, aby hledal všechny sítě – tedy v této podobě nelze úlohu použít pro testování proměnné *jednoznačnost řešení*.
4. Tato konkrétní úloha s sebou nese i určitou sociálně-kulturní zátěž, neboť se jedná o standardní úlohu, se kterou se respondenti mohli již několikrát setkat, a pak tato úloha nesprávně testuje danou proměnnou.
5. Úloha může být také specifikována tak, aby si žák, který se s úlohou nesetkal, představil, co se po něm žádá. Např.: „Představ si, že máš papírovou krychli a dále máš šest čtverců. Slep (izolepou) čtverce k sobě tak, aby když položíš krychli na jeden čtverec, tak jsi danou krychli obalil.“

Na pomezí prostorové a rovinné představivosti je následující úloha.

Zadání: Představ si, že provádíš všechna naznačená přeložení, a nakonec odstřihneš levý dolní roh výsledného čtverce (viz obr. 3.2.4). Který z obrazců A–E po rozložení dostaneš? (Powell, 2018, s. 78)[8]

8 Powell cituje článek Rauscher, F. H., Shaw, G. L., & Ky, C. N. (1983). Music and spatial task performance. *Nature, 365*, s. 611, jenže v tomto článku se o testu jen mluví a není zobrazený. Proto jsme si dovolili výjimečně použít sekundární zdroj, ve kterém je navíc uveden obrázek v české variantě.

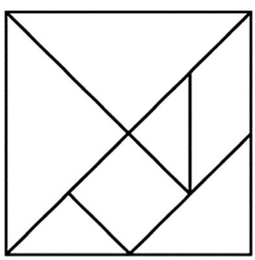


Obr. 3.2.4: Grafické zadání úlohy (Powell, 2018, s. 78)

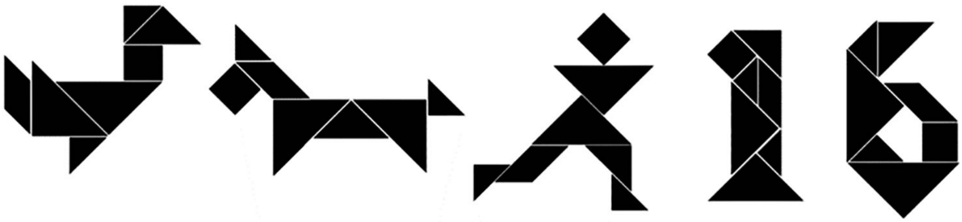
Tato úloha v sobě kombinuje představu manipulace v prostoru s reálným objektem – papírem a odvolává se tak na řešitelovu zkušenost s jeho rovinnou reprezentací. Výsledkem manipulace v prostoru je však rovinný útvar, a tak tato úloha zasahuje jak do prostorové, tak do rovinné představivosti. Úlohu je možné ztížit doplněním „nadbytečných" údajů. Např.: Je dán obdélník s poměrem stran 1 : 2. O nadbytečnosti zde mluvíme proto, že tato skutečnost je patrna z obrázku v zadání.

Úlohy na zkoumání představivosti v rovině jsou obdobné těm, které jsou zaměřeny na prostorovou představivost. Tyto úlohy jsou opět spojené s tvarem, přičemž mentální operace jsou obvykle spojené nikoliv s manipulací objektu jako s celkem, ale s manipulacemi, které předpokládají dělení na další části a jejich následné přeskupování.

Obvyklými úlohami v této kategorii jsou úlohy založené na tangramu. Tangram je hlavolam, který sestává ze sedmi dílů, přičemž jejich získání ze čtverce je znázorněno na obrázku 3.2.5. Čtverec také bývá obvykle prvním objektem, který se z daných dílů seskládává. Ilustrujme vyjadřovací možnosti tangramu obrázkem 3.2.6, který ukazuje již vyřešené hlavolamy. Zadáním hlavolamu je potom obrys skládanky.



Obr. 3.2.5: Tangram

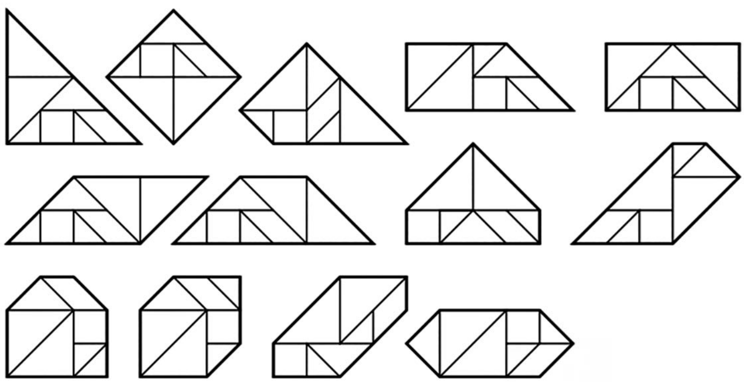


Obr. 3.2.6: Tangram – vyřešené hlavolamy

Ilustrujme užití tangramu v ryze geometrickém kontextu.

Zadání: Z tangramových dílů sestavte všechny konvexní útvary.

Řešení (viz obr. 3.2.7) je převzato z (Pohl & Richter, 2021, s. 122):



Obr. 3.2.7: Všechny konvexní útvary vytvořené z tangramu (převzato z Pohl & Richter, 2021, s. 122)

Povšimněme si dvou řešení, přičemž první je v první řadě uprostřed a druhé je ve druhé řadě na konci. Dlouhodobá praxe autorů ukazuje, že právě tato řešení nebývají u žáků základních škol obvyklá, a to ani při práci s fyzickým modelem. Důvody jsou následující:

1. ve všech ostatních řešeních, vyjma posledního řešení v první řadě, oba dva velké trojúhelníky vytvářejí čtverec, rovnoramenný trojúhelník nebo rovnoběžník (dotýkají se celou stranou) a jednotlivé konvexní útvary vznikají přikládáním zbývajících dílků (např. vlevo nahoře trojúhelník, čtverec a rovnoběžník, kdy velké trojúhelníky tvoří rovnoramenný trojúhelník a zbývající dílky také);
2. poslední útvar v první řadě vznikl obdobně, ale s tím rozdílem, že se vzal jako první trojúhelník z pěti menších dílků a pak byly přikládány zbývající velké trojúhelníky.

U dvou zmiňovaných neobvyklých řešení tomu tak není, velké trojúhelníky se buď nedotýkají vůbec a nejsou umístěny symetricky, nebo se dotýkají jen částí strany.

Chceme-li použít tuto úlohu jako testovou, je možné žákům předložit předkreslené obrysy a nechat řešitele zakreslit do nich příslušné tangramové kameny. Obvyklý čtverec se zakreslenými kameny může být součástí zadání úlohy.

Jinou vhodnou úlohou pro zkoumání rovinné představivosti je provedení rozboru (tzv. náčrtku) konstrukční úlohy, popř. vyznačení vstupních a výstupních objektů konstrukční úlohy v předloženém náčrtku.

Jsme si vědomi skutečnosti, že test *matematické citlivosti* nepokrývá všechny možné oblasti proměnné *geometrická představivost*, ale jak už bylo řečeno výše, test může poukázat na deficit žáka v této proměnné.

3.2.3 JEDNOZNAČNOST ŘEŠENÍ

Zkoumanou citlivostí v rámci této proměnné je jev, nakolik je žák schopen, ochoten či puzen se zabývat problematikou existence více řešení dané úlohy. Nakolik si tedy klade otázky z následujícího souboru (J-1):

- Našel jsem všechna řešení?
- Nemá daná úloha ještě jiné řešení, než jsem našel?
- Jak poznám, že už jsem našel všechna řešení?
- Jsou všechna možná řešení (vypočítané hodnoty) také správná řešení?

Je zřejmé, že s otázkou počtu řešení se také pojí otázka existence řešení. Na základě několika iterací v rámci předvýzkumu jsme zjistili, že za podmínek kladených na test neumíme v tuto chvíli zjišťovat citlivost žáka k jevu existence či neexistence řešení.

Dobrý učitel matematiky vede své žáky při řešení úloh ke hledání všech řešení dané úlohy. Může je k tomu pobízet slovně, může je k tomu navádět svým vlastním příkladem, kdy demonstruje řešení vhodných úloh, a samozřejmě je k tomu může nabádat samotné zadání úlohy. Vraťme se na chvíli k úloze o sítích krychle (viz obr. 3.2.3). Srovnejme následující varianty zadání úlohy:

(a) Je dána krychle. Načrtni všechny její sítě.

(b) Je dána krychle. Načrtni její sítě.

(c) Je dána krychle. Načrtni její síť.

Je zřejmé, že jednotlivé varianty zadání žáka nabádají k tomu, jak má vypadat řešení.

A právě na základě určité citlivosti, nebo spíše žákova vnitřního nastavení, kdy si klade některé otázky z výše uvedeného souboru otázek (J-1), lze usoudit, jak na tom bude při řešení dalších úloh. Možné interpretace určitého zadání pak jsou: