E-KNIHY

MIKROEKONOMICKÁ ANALÝZA

JINDŘICH SOUKUP

2012

E-knihy

M I K R O E K O N O M I C K Á A N A L Ý Z A

Jindřich Soukup

2012

Vydalo nakladatelství a vydavatelství E-knihy
V roce 2012, vydání čtvrté, v nakladatelství a vydavatelství E-knihy první
Sazba: E-knihy

Informace pro čtenáře: velikost publikace je 508 992 znaků včetně mezer, což odpovídá 282,8 normovaným stranám textu. Kromě textu publikace obsahuje dále 79 grafů a 10 tabulek. Součástí publikace je rejstřík a seznam literatury.

Recenze: Ing. Tomáš Pavelka, Ph.D.

ISBN 978-80-905326-0-1 (online: mobi)
ISBN 978-80-905326-1-8 (online: e-pub)
ISBN 978-80-905326-2-5 (online: pdf)

OBSAH

Předmluva

Výuka mikroekonomie je na ekonomických fakultách zemí Evropské unie obvykle organizována ve třech kursech. Dva kursy, základní a pokračovací, jsou součástí bakalářského studia. Třetí, pokročilý kurs mikroekonomie, se vyučuje standardně v magisterském studiu. Učebnici, kterou jste právě otevřeli, obsahuje problematiku, jenž se v převážné míře objevuje v pokročilých kursech.

Jako základní literatura se v anglosaském světě používají k výuce pokročilého kursu mikroekonomie učebnice Mikroekonomie H. Gravella nebo R. Reese, Mikroekonomická teorie A. Mass-Collela a M. D. Whinstona, Krepsův Kurs mikroekonomické teorie nebo Varianova Mikroekonomická analýza. Přitom jde o velice podrobné a rozsáhlé učebnice; délka jejich často velice formalizovaného textu se pohybuje od 500 až k 1000 stranám. I když byl Gravellův a Reesův text přeložen do českého jazyka již před řadou let, dosud žádné nakladatelství standardní učebnici pokročilé mikroekonomické analýzy nevydalo. Přetrvává tak dluhodobě určitá mezera na trhu odborné ekonomické literatury, kterou se pokouší tato učebnice alespoň částečně zacelit.

Výklad se v učebnici soustřeďuje na problematiku dokonale konkurenčních trhů. Čtenář nalezne ve třech kapitolách prvního oddílu analýzu poptávky, ve druhém oddílu pak rozbor nabídkové strany tržního mechanismu. Lze se přitom seznámit jak se klasickým výkladem problematiky, tak i s alternativními přístupy k poptávce i nabídce. Třetí oddíl učebnice je věnován otázkám dílčí konkurenční rovnováhy a tržních selhání (tj. nedokonalé konkurenci, externalitám a veřejným statkům). Kniha je zakončena dvěma kapitolami čtvrtého oddílu, které jsou věnovány problematice analýze všeobecné rovnováhy a ekonomii blahobytu.

Učebnice navazuje na vydání z let 1999, 2001 a 2003, která vyšla péčí nakladatelství Melandrium.

Učebnice obsahuje již osvědčený pomocný aparát s cílem usnadnit studentovi práci s textem. Na konci každé kapitoly je uveden přehled klíčových pojmů a shrnutí látky, která se v ní nově vykládá. Dále je zde uvedeno vždy několik úkolů a příkladů včetně jejich výsledků. Student by měl nalézt vyhovující cestu od zadání k výsledku úlohy a ověřit si tak, zda správně pochopil látku příslušné kapitoly.

Kniha může pomoci i zájemcům o další, podrobnější studium mikroekonomie. Za každou její kapitolou čtenář nalezne reference na další literaturu, která se zabývá řešenou problematikou. Odkazy tak v sobě skrývají možnost přístupu k mnoha dalším studijním pramenům, neboť v referencích uvedení autoři uvádějí odvolávky na další rozsáhlou odbornou literaturu, která se týká zkoumané problematiky.

Na zvolené úrovni výkladu nebylo možné se vyhnout formalizovanému řešení některých problémů. Čtenář proto nalezne v učebnici dodatek, který uvádí přehled základního matematického aparátu, jehož znalost je potřebná k pohodlnému čtení mikroekonomického textu. Pro čtenáře bude výhodné, jestliže před vlastním studiem mikroekonomických problémů nahlédne do tohoto dodatku a bude s ním konfrontovat své matematické znalosti.

I tak se však předpokládá, že čtenář již získal znalosti na úrovni středně pokročilého kursu mikroekonomie. Aby byla tato návaznost zdůrazněna, jsou uváděny na řadě míst této knihy odkazy na učebnici Hořejší, B. - Soukupová, J. - Macáková, L. - Soukup, J.: Mikroekonomie, jenž pokrývá látku středně pokročilého kursu.

Odborný text je vždy „živým“ textem v tom smyslu, že jej lze neustále zlepšovat na základě interakce čtenářů s autorem, resp. studentů s učitelem. Autor bude proto vděčný za zaslání připomínek a námětů na připojenou elektronickou adresu.

Na závěr nezbývá nic jiného, než si přát, aby čas, který autor věnoval přípravě této učebnice, umožnil efektivnější studium mikroekonomie jejím čtenářům.

Jindřich Soukup

P.S.

Mé poděkování za pomoc při přípravě učebního textu patří Janu Coufalovi z katedry matematiky VŠE v Praze za vypracování matematického dodatku a zejména pak mé manželce Janě Soukupové za odbornou pomoc a diskuse při přípravě samotné mikroekonomické problematiky.

Praha, říjen 2000

Předmluva k 1. elektronickému (celkem 4. vydání)

Když autor psal v roce 2000 svou předmluvu k prvnímu vydání této knihy, netušil, jak rychle se budou rozvíjet elektronická média a jak je budou čtenáři široce využívat. Před 10 let nebyly notebooky, tablety či čtečky elektronických knih naprosto běžné jako dnes či vůbec neexistovaly.

V reakci na jejich rozvoj vzniklo tato první elektronická verze učebnice mikroekonomie. Je zpracována tak, aby si ji mohli čtenáři bez poblému stáhnout do svých přístrojů, od „chytrých“ telefonů po notebooky.

Zvolená forma publikace dovoluje, aby se díky ní stal odborný text naprosto interaktivním (či slovy prvního vydání „živým“) a mohl být průběžně vylepšován na základě komunikace čtenářů s autorem, resp. studentů s učitelem. Autor bude proto vděčný za zaslání připomínek a námětů na připojenou elektronickou adresu a zcela určitě je bude průběžně promítat do textu učebnice.

Jindřich Soukup (soukup@vse.cz)

ODDÍL I. ANALÝZA POPTÁVKY

Kapitola 1 Od maximalizace užitku k poptávce

V kapitole se budeme zabývat otázkou, za jakých podmínek lze nalézt jediné řešení problému spotřebitele, který maximalizuje svůj užitek. Z optima spotřebitele odvodíme soustavu Marshallových individuálních poptávek.

1.1 Existence jediného řešení

Model, který se zabývá optimalizačním problémem, tvoří dvě složky: cílová (kriteriální, účelová) funkce a množina přípustných řešení.

Při formulaci optimalizačního problému musíme nejdříve vymezit účelovou funkci. Funkce se skládá ze závisle proměnné, která představuje objekt maximalizace či minimalizace, a z množiny nezávisle proměnných, která označuje objekty, jejichž velikost může ekonomický subjekt volit s ohledem na optimalizaci. Někdy se proto nezávisle proměnné označují jako volitelné.

Množina přípustných řešení zahrnuje všechny alternativy, které jsou dostupné subjektu při jeho rozhodování.

Podmínky, za nichž lze nalézt řešení optimalizačního problému, vymezují učebnice matematiky – viz např. učebnici [5, s. 206]. Pro naše potřeby je proto pouze vyjmenujeme. Řešení existuje, pokud:

* účelová funkce je spojitá,
* množina přípustných řešení je a) neprázdná, b) uzavřená, c) ohraničená.

Pokud řešení existuje, je možné si však položit otázku, zda uvedené řešení je lokálním nebo globálním extrémem. Lokální extrém je současně extrémem globálním, pokud:

* účelová funkce je kvasikonkávní,
* množina přípustných je řešení je konvexní.

Přitom lokální extrém se může stát globálním extrémem, i když uvedené podmínky nejsou splněny.

Opět pouze uvádíme požadavky, které jsou kladené na globální extrém, a ponecháme na čtenáři, aby se v případě potřeby podrobnějšího výkladu vrátil k učebnicím matematiky, např. k [6, s. 244].

Mohou však existovat funkce, které mají více globálních extrémů. Zformulujeme nyní podmínky, za nichž lze nalézt jediné řešení optimalizačního problému. Opět pouze tyto podmínky vyjmenujeme a pro potřeby podrobnějšího výkladu se odvoláme na již uvedené učebnice matematiky.

Jediné řešení lze nalézt, pokud

* je buď účelová funkce ryze kvasikonkávní,
* nebo je množina přípustných řešení ryze konvexní,
* nebo platí obojí současně.

Pro potřeby ekonomického výkladu je třeba si dále uvědomit, že ryze kvasikonkávní funkce vykazuje ryze konvexní vrstevnice funkce. Vrstevnice funkce chápeme jako množinu hodnot nezávisle proměnných příslušné funkce, kterým odpovídá konstantní hodnota závisle proměnné.

1.2 Preference spotřebitele a funkce užitku

V předcházejícím bodě jsme vymezili matematické podmínky, za nichž lze nalézt jediné řešení optimalizačního problému. Předmětem našeho zájmu je však analýza chování spotřebitele a poptávky.

V dalším kroku výkladu proto zformulujeme předpoklady, kterým musí chování spotřebitele vyhovovat, abychom mohli nalézt jediný (a optimální) koš statků, který bude spotřebitel nakupovat. Budeme se tudíž zabývat axiómy chování spotřebitele.

1. *Úplnost srovnání*

Označme spotřební koše vektory ***A, B, C, D*** atd. Každý z těchto košů se skládá z určitého množství statků x_i pro = 1,..., *n*, kde *n* udává počet statků, které koš obsahuje.

Pro jednoduchost také předpokládáme, že není možné, aby množství spotřebovávaných statků, které obsahují jednotlivé koše, bylo záporné (Xi ≥ 0 pro všechna *i*).

Axióm úplnosti srovnání lze potom zformulovat takto: pro každou dvojici technicky přípustných spotřebních košů, označených vektory ***A*** a ***B***, musí být pravdivé jedno a právě jedno z následujících tvrzení:

A se preferuje před ***B***
B se preferuje před ***A***
A a ***B*** jsou stejně žádoucí

Axióm tudíž předpokládá, že spotřebitel je schopen porovnat kterékoliv dostupné dva koše statků.

2. *Tranzitivita*

Pro kteroukoliv trojici technicky dostupných spotřebních košů, označených vektory ***A, B*** a ***C***, musí platit: pokud spotřebitel preferuje ***A*** před ***B*** a ***B*** preferuje před ***C***, potom musí preferovat také ***A*** před ***C***.

Axióm tranzitivity zajišťuje, že se indiferenční křivky jednoho racionálního spotřebitele neprotínají.

3. *Reflexivita*

Pro kterýkoliv spotřební koš (např. pro koš ***A***) platí: A ≥ A, tj. koš ***A*** má vyšší nebo stejný užitek jako on sám. Jde o matematickou podmínku pro existenci funkce užitku, která je však zjevně triviální.

Uvedené tři axiómy umožňují uspořádat preference. Pokud předpokládáme např. existenci čtyř košů, může je některý spotřebitel uspořádat do pořadí ***A*** = ***B*** > ***C*** > ***D***. To však zatím neznamená, že jsme schopni přiřadit takto uspořádaným preferencím funkci užitku. Příkladem preferencí, které vyhovují uvedeným třem axiómům, a přesto nemají odpovídající funkci užitku, jsou tzv. lexikografické preference.

Lexikografické preference

V případě lexikografických preferencí jsou spotřební koše uspořádané způsobem, který připomíná uspořádání hesel ve slovníku (lexikonu). Ve slovníku má kterékoliv heslo, jehož název začíná písmenem *D*, přednost před heslem začínajícím na *E*, bez ohledu na to, které písmeno po písmenu *D* následuje. Teprve v případě, že máme dvě hesla, která začínají na *D*, rozhoduje druhé písmeno v názvu hesla o jejich pořadí.

Obdobně mohou být uspořádány preference spotřebitele. Předpokládejme, že se spotřební koše skládají ze dvou statků *X* a *Y*. Pokud určitý koš obsahuje více statku *X* než jiné koše, potom jej spotřebitel preferuje před ostatními koši, bez ohledu na to, kolik koše obsahují statku *Y*. Teprve v případě, jestliže koše obsahují stejný objem statku *X*, bude spotřebitel preferovat ten koš, který obsahuje více komodity *Y*.

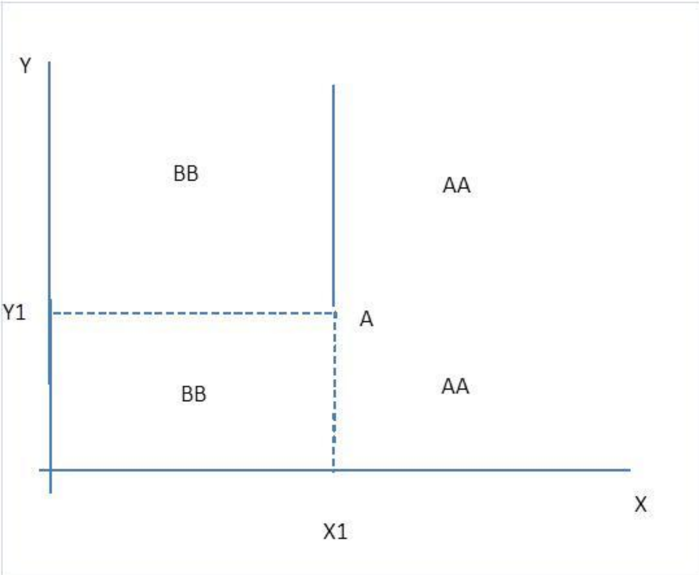
V případě lexikografických preferencí každou indiferenční křivku tvoří jediný bod. K vysvětlení použijeme graf 1-1. Zvolme si libovolný koš komodit $\boldsymbol{A} = [x_1, y_1]$. Koše statků *X* a *Y*, kterým odpovídají body v ploše označené AA (včetně plné čáry), spotřebitel preferuje před košem ***A***, protože body vpravo od plné čáry obsahují více statku *X* a body na plné čáře sice obsahují stejné množství statku *X* jako koš ***A***, ale zahrnují více statku *Y* než koš ***A***. Spotřebitel naproti tomu preferuje koš ***A*** proti všem košům komodit *X* a *Y*, které zobrazuje plocha BB (včetně čárkované čáry), neboť koš ***A*** obsahuje více zboží *X* než koše vlevo od čárkované čáry a body na čárkované čáře sice obsahují stejné množství statku *X* jako koš ***A***, ale zahrnují méně statku *Y*.

Platí tudíž, že spotřebitel preferuje všechny koše AA před košem ***A*** a koš ***A*** před všemi koši BB. Neexistují tudíž koše, které jsou indiferentní ke koši ***A***. Indiferenční množina se skládá z jediného bodu.

Při výkladu jsme vycházeli z libovolně určeného bodu; stejné tvrzení platí tudíž i pro všechny ostatní body: každá indiferenční množina se skládá z jediného bodu. Nelze proto získat spojitou funkci užitku, i když lexikografické preference vyhovují všem dosud uvedeným axiómům chování spotřebitele..

Náš výklad musíme proto rozšířit o další axióm chování spotřebitele, o axióm spojitosti.

Graf 1-1 Lexikografické preference



4. ***Spojitost***

Nový axióm předpokládá, že spotřebitel požaduje zvýšení spotřeby statku *Y* při libovolně malém snížení spotřeby statku *X*. Tento předpoklad nám zajistí, že účelová funkce je spojitá.

Funkce užitku

Teprve uvedené čtyři axiómy jsou dostatečnou podmínkou pro to, abychom mohli vyjádřit uspořádané preference spotřebitele pomocí funkce užitku.

Funkci užitku získáme z uspořádaných preferencí podle jednoduchého pravidla:

* přiřadíme stejné reálné číslo všem košům statků, které jsou pro spotřebitele stejně žádoucí,

* pokud preferuje spotřebitel jeden koš před druhým košem, přiřadíme více preferovanému koši vyšší reálné číslo.

Stejnou skutečnost můžeme vyjádřit formálně jako:

u (***A***) > *u* (***B***) pokud a jenom pokud ***A*** je preferováno proti ***B***

u (***A***) = *u* (***B***) pokud a jenom pokud ***A*** je stejně významné s ***B***

Funkce užitku odráží uspořádaní jednotlivých spotřebních košů, jde proto o ordinální funkci.

Významné je znaménko (ne)rovnosti, nikoliv vlastní velikost změny číselné hodnoty mezi dvěma koši. Protože můžeme přiřadit v podstatě libovolné číselné hodnoty (vyhovující uvedenému pravidlu), můžeme pro uspořádané preference vytvořit nekonečně mnoho funkcí užitku.[1] Následující tabulka uvádí 3 příklady, kdy 4 košům uspořádaným do pořadí **A** = **B** > **C** > **D** jsou přiřazeny tři odlišné číselné řady a tudíž funkce užitku. Každý koš se přitom skládá z různého množství dvou komodit, X a Y.

Tabulka 1-1 Různé funkce užitku lze přiřadit stejným preferencím

Koš	Komodity		Funkce užitku		
	X	Y	$U = XY$	$V = XY + 3$	$W = X^3Y^3$
A	3	4	12	15	1728
B	4	3	12	15	1728
C	2	2	4	7	64
D	1	1	1	4	1

Z funkce užitku odvodíme její vrstevnici. V teorii spotřebitele známe vrstevnice funkce užitku pod názvem indiferenční křivky[2].

Existence funkce užitku nám ještě nezajišťuje, že lze nalézt jediné řešení při hledání optima spotřebitele, který maximalizuje užitek. Naše předpoklady o chování spotřebitele musíme proto rozšířit o další dva axiómy.

5. ***Axióm nepřesycení (dominace)***

Nechť máme dva spotřební koše (**A** a **B**) a nechť se každý z těchto košů skládá z určitého množství dvou statků: **A** = (x_0,y_0) a **B** = (x_1,y_1). Spotřebitel bude preferovat koš **A** před košem **B**, pokud platí:

buď: $x_0 > x_1$ a zároveň $y_0 \geq y_1$

nebo: $y_0 > y_1$ a zároveň $x_0 \geq x_1$

Axióm vylučuje existenci statků s negativními preferencemi – viz [1, s. 58].

Axióm nepřesycení dále zajišťuje, že indiferenční křivky mají zápornou směrnici a že v grafickém zobrazení nejsou indiferenční křivky širší ("tlustší") než jeden bod.

6. ***Preference průměru před extrémy***

Předpokládáme, že racionální spotřebitel preferuje ve své spotřebě kombinace různých komodit před spotřebou, kdy je zastoupen ve značném rozsahu (nebo dokonce výlučně) pouze jeden statek. Např. spotřebitel dává přednost denní spotřebě dvou šálků kávy a 2 kostek cukru před spotřebou pouze 4 kostek cukru.

---

1 *Vzájemnou transformaci jednotlivých funkcí užitku lze provádět pomocí pozitivní monotónní transformace funkce. Její popis a vliv na mezní míru substituce ve spotřebě - viz např. [3], s. 56.*

2 *Mezní míře substituce ve spotřebě MRS_C odpovídá směrnice indiferenční křivky. Analýzou MRS_C se zde nebudeme zabývat - lze ji nalézt např. v učebnici [1, s. 56]*

Preference průměru před extrémy zajišťuje ryze konvexní tvar indiferenčních křivek. Toto tvrzení lze vyjádřit i formálně. Pro každé dva koše $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$, které přinášejí spotřebiteli stejný užitek u, platí:

$$U\,[t\,\boldsymbol{A} + (1 - t)\,\boldsymbol{B}] \; > \; u\,(\boldsymbol{A}) + u\,(\boldsymbol{B})$$

pro kterékoliv $t\ (0 < t < 1)$.

Připomeňme si naše matematické znalosti: ryze konvexní indiferenční křivky (tj. vrstevnice funkce užitku) souvisejí s ryze kvasikonkávní funkcí užitku.

Shrneme si náš dosavadní výklad. Existence uvedených axiómů o chování spotřebitele je ekvivalentní s existencí kvasikonkávní funkce užitku. Z hlediska účelové funkce lze tudíž jediné řešení nalézt. Je však nutné provést ještě analýzu množiny přípustných řešení.

1.3 Množina spotřebních možností

Množina přípustných řešení vystupuje v teorii spotřebitele jako množina spotřebních možností. Definujeme ji za předpokladu, že spotřebitel nakupuje pouze dva statky (X a Y) za ceny P_X a P_Y vyšší než nula a při určitém příjmu I.

Množinu vymezíme pomocí podmínek nezápornosti a rozpočtového omezení. Předpokládáme, že spotřeba komodit je nezáporná, tj. že $X \geq 0$ a také $Y \geq 0$. Rozpočtové omezení má potom tvar $P_X X + P_Y Y \leq I$.

Připomeňme si, že množina přípustných řešení musí být neprázdná, omezená, uzavřená a konvexní, abychom našli řešení našeho optimalizačního problému.

Díky podmínkám nezápornosti je množina spotřebních možností neprázdná; i když spotřebitel nic nekoupí, nacházíme se v grafu v bodě (0,0), který je součástí množiny spotřebních možností.

Množina spotřebních možností je omezená: zespodu podmínkami nezápornosti a seshora rozpočtovým omezením.

Stejně tak je množina spotřebních možností uzavřená: kterýkoliv koš na rozpočtovém omezení nebo na odpovídající části jedné z obou os je dostupný.

Množina spotřebních možností je konvexní. Spojíme-li přímkou kterékoliv dva koše statků, které jsou součástí množiny, leží tato přímka buď uvnitř množiny spotřebních možností nebo na některé její hranici.

Spojnice dvou košů může ležet na hranici množiny spotřebních možností. Množina je tudíž konvexní, není však ryze konvexní.

Díky axiómům o chování spotřebitele víme, že funkce užitku je ryze kvasikonkávní. Není tudíž nutné, aby množina spotřebních možností byla ryze konvexní, abychom získali jediné globální optimum. Dostatečnou podmínkou je konvexnost množiny.

1.4 Optimum spotřebitele maximalizujícího užitek

Spotřebitel maximalizuje svůj užitek. Obrazně řečeno, spotřebitel se snaží vystoupit na co nejvyšší bod "hory užitku", musí se však pohybovat podél "plotu", který mu zde představuje rozpočtové omezení.

Problém se tak redukuje na dosažení co nejvyšší vrstevnice (indiferenční křivky) funkce užitku při daném rozpočtovém omezení vyjádřeném rovnicí směny. Problém spotřebitele lze tak formálně zapsat ve tvaru:

$max\ U = f\,(X, Y)$
při omezení: $P_X X + P_Y Y = I$
$X \geq 0, Y \geq 0$

Problém budeme řešit pomocí Lagrangeovy funkce:
$L = U\,(X,Y) - \lambda\,(Px\,X + Py\,Y - I)$

Při řešení budeme předpokládat, že existuje vnitřní řešení[1]. Vypočteme nejdříve první parciální derivace Lagrangeovy funkce:

$\delta L / \delta X = \delta U / \delta X - \lambda\, Px$
$\delta L / \delta Y = \delta U / \delta Y - \lambda\, Py$
$\delta L / \delta \lambda = - Px\,X - Py\,Y + I$

Parciální derivace položíme rovné nule a vypočteme podmínky prvního řádu pro vnitřní řešení. Při výpočtu současně eliminujeme z prvních dvou derivací pomocnou proměnnou:

$(\delta U / \delta X) : (\delta U / \delta Y) = Px : Py$
$I = P_X X + P_Y Y$

První rovnice nám udává podmínku optima spotřebitele, tj. rovnost mezní míry substituce ve spotřebě (levá strana rovnice) a mezní míry substituce ve směně (pravá strana rovnice). Druhá rovnice nám pouze říká, že spotřebitel vynaložil celý příjem na nákup obou statků.

Zajímat nás bude také ekonomická interpretace pomocné proměnné λ. Jejím osamostatněním (např. z první z uvedených parciálních derivací) získáme vztah:

$\lambda = (\, \delta U / \delta X\,) : Px$

Pomocnou proměnnou lze chápat jako stínovou cenu – kolik dodatečného (mezního) užitku získá spotřebitel za dodatečnou vynaloženou korunu svého příjmu. V bodě optima je přitom hodnota pomocné proměnné pro všechny statky stejná.

1.5 Marshallovy poptávky

Systém parciálních derivací poskytl řešení jednoho dílčího problému. Určili jsme optimální nákup statků *X* a *Y* jedince, který maximalizuje svůj užitek při určitých cenách komodit a příjmu.

Nás však může zajímat, jak bude reagovat poptávané množství *X* a *Y*, pokud se budou měnit ceny statků a příjem spotřebitele.

---

1 *Rozdíl mezi vnitřním a rohovým řešením - viz [1, s. 64]. Podmínky prvního řádu pro rohové řešení lze získat s pomocí Kuhn - Tuckerovy věty. Tuto větu lze též aplikovat na vnitřní řešení.*

Řešení optimalizačního problému záviselo pouze na cenách, příjmu a funkci užitku. Můžeme tudíž z prvních dvou vypočtených parciálních derivací odvodit poptávkové funkce (při dané funkci užitku):

$X = f^1 (I, P_X, P_Y)$
$Y = f^2 (I, P_X, P_Y)$

Funkce, kdy nakupované množství statku závisí na příjmu spotřebitele a cenách komodit (při daných preferencích), se označují jako Marshallovy funkce poptávky.

V uvedené situaci spotřebitel nakupoval dvě komodity. Mohli jsme proto odvodit soustavu pouze dvou individuálních poptávek[1].

Podmínka druhého řádu při maximalizaci užitku požaduje ryze kvasikonkávnost funkce užitku (spotřebitel nakupuje dva statky, determinant ohraničené Hessovy matice proto musí být kladný). Podmínku jsme však zajistili pomocí šestého předpokladu o chování spotřebitele, podle něhož spotřebitel preferuje průměr před extrémy. Z hlediska ekonomické interpretace již nejsou druhé parciální derivace zajímavé a nebudeme se jimi zabývat.

Z předpokladů, které umožnily odvodit soustavu Marshallových funkcí poptávky, plyne, jaké vlastnosti musí splňovat tyto funkce, aby mělo smysl je považovat za uplatnitelné v empirickém výzkumu. Dříve, než se tímto problémem budeme moci zabývat, musíme odvodit další funkce, které plynou z maximalizace užitku spotřebitelem. Odložíme proto otázku vlastností poptávkových funkcí až do následující kapitoly.

1.6 Nepřímá funkce užitku

Funkce užitku vyjadřuje vztah mezi celkovým užitkem spotřebitele a množstvím statků, které jedinec spotřebovává. Je však často obtížné sledovat na trhu množství komodit, které spotřebitel nakupuje. V teorii, ale i v empirické analýza, je často pohodlnější nahradit množství spotřebovávaných statků jejich cenami a pracovat s tzv. nepřímou funkcí užitku.

Název funkce vyplývá ze způsobu jejího odvození. Nejdříve vypočteme Marshallovy funkce poptávky (pomocí maximalizace užitku spotřebitele) a tyto funkce dosadíme zpět do funkce užitku. Užitek spotřebitele tak závisí nepřímo, prostřednictvím maximalizačního procesu, na příjmu spotřebitele a na cenách statků.

Pokud předpokládáme, že spotřebitel nakupuje pouze dva statky, má jeho funkce užitku tvar $U = f\ (X,Y)$. Prostřednictvím maximalizačního procesu vypočteme Marshallovy individuální poptávky pro obě komodity:

$X = f^1(I, P_X, P_Y)$
$Y = f^2(I, P_X, P_Y)$

---

1 *Grafické odvození Marshallovy poptávky z optima spotřebitele, který maximalizuje užitek, lze nalézt v učebnici [1], s. 82 až 86.*

a dosadíme je zpět do funkce užitku. Získáme tak nepřímou funkci užitku: $U = v\ (I, P_X, P_Y)$.

Získali jsme tak nepřímou funkci užitku, kde je užitek spotřebitele funkcí jeho příjmu a cen statků.

Nyní budeme analyzovat vlastnosti, které vykazuje spojitá nepřímá funkce užitku. Předpokládáme nejdříve, že dochází k neproporcionální změně nezávisle proměnných, které jsou obsažené v této funkci. Neproporcionální změnu cen a příjmu lze převést do situace, kdy se mění pouze jedna z proměnných. Budeme se proto nejdříve zabývat změnou velikosti příjmu při neměnné výši cen komodit a potom budeme zkoumat účinky změny ceny jedné komodity při neměnné výši ostatních cen a při konstantní výši příjmu jedince.

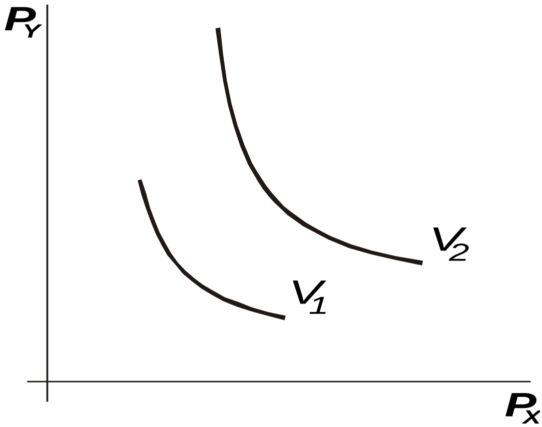
Uvažujeme nejdříve změnu příjmu. S růstem příjmu (a při neměnné výši cen) se celkový užitek jedince zvyšuje. Tato vlastnost nepřímé funkce užitku je spojena s jedním z axiómů o chování spotřebitele, s axiomem nenasycení. Nepřímá funkce užitku je tudíž rostoucí se zvyšujícím se příjmem.

Dále předpokládejme, že se bude měnit pouze jedna z cen komodit, které jedinec nakupuje. S růstem této ceny bude užitek jedince buď klesat nebo (v nejlepším případě) se nezmění. Nepřímá funkce užitku je tudíž nerostoucí s růstem cen.

Musíme též analyzovat situaci, kdy dochází k proporcionální změně nezávisle proměnných, které jsou obsažené v nepřímé funkci užitku. Pokud vzrostou všechny ceny a příjem proporcionálně (např. zvýší se dvakrát), celkový užitek jedince se nezmění. Nepřímá funkce užitku je tak homogenní stupně nula v cenách a v příjmu.

Z nepřímé funkce užitku můžeme též odvodit tzv. cenové indiferenční křivky. Cenové indiferenční křivky udávají kombinace cen, které přinášejí – při dané úrovni příjmu – jedinci stejný celkový užitek. Průběh cenových indiferenčních křivek má obvyklý tvar: křivky jsou klesající a konvexní. Cenové indiferenční křivky pro ceny dvou komodit zobrazuje graf 1-2. Pokud se zvýší cena jedné komodity (např. cena P_X) musí se snížit cena jiného zboží (tj. cena P_Y), aby jedinec dosahoval konstantní úrovně užitku. Pokud se však zvýší ceny obou komodit, užitek jedince se sníží. Z této skutečnosti ovšem plyne, že cenové indiferenční křivky, které jsou vzdálenější od počátku, odpovídají nižší úrovni celkového užitku. Na grafu 1-2 máme uvedené dvě cenové indiferenční křivky (V_1, V_2). Cenová indiferenční křivka V_2 se nachází ve větší vzdálenosti od počátku; odpovídá tak nižšímu celkovému užitku jedince, než který vyjadřuje cenová indiferenční křivka V_1.

Graf 1-2 Cenové indiferenční křivky



Shrnutí

1. Řešení existuje, pokud účelová funkce je spojitá a množina přípustných řešení je neprázdná, uzavřená a ohraničená.
2. Lokální extrém je současně extrémem globálním, pokud je účelová funkce kvasikonkávní a množina přípustných je řešení je konvexní.
3. Jediné řešení lze nalézt, pokud je buď účelová funkce ryze kvasikonkávní nebo je množina přípustných řešení ryze konvexní nebo platí obojí současně. Ryze kvasikonkávní funkce přitom vykazuje ryze konvexní vrstevnice funkce.
4. Axiómy úplnosti srovnání, tranzitivity a reflexivity umožňují uspořádat preference jednoho spotřebitele**.**
5. Spojitou funkci užitku získáme, pokud jedinec požaduje – při platnosti axiómů uvedených v předcházejícím bodě shrnutí – zvýšení spotřeby jednoho statku při libovolně malém snížení spotřeby jiného statku. Ve funkci užitku celkový užitek jedince závisí na množství spotřebovávaných komodit.
6. Indiferenční křivky jsou vrstevnice funkce užitku. Indiferenční křivky jsou ryze konvexní, pokud chování jedince vyhovuje – kromě dříve uvedených axiómů – ještě axiómům nepřesycení a preference průměru před extrémy.
7. Pokud jsou indiferenční křivky ryze konvexní, stačí k nalezení jediného řešení optima spotřebitele maximalizujícího užitek, aby byla množina spotřebních možností konvexní.
8. Řešením úlohy spotřebitele, který maximalizuje užitek, lze odvodit Marshallovy funkce poptávky. V těchto funkcích závisí nakupované množství statku na příjmu spotřebitele a na cenách komodit (při daných preferencích).
9. Dosazením Marshallových funkcí poptávky zpět do funkce užitku získáme nepřímou funkci užitku. Užitek spotřebitele v této funkci závisí nepřímo, prostřednictvím maximalizačního procesu, na příjmu spotřebitele a na cenách statků (opět při daných preferencích).

Důležité pojmy

axióm úplnosti srovnání
axióm nepřesycení
tranzitivita
funkce užitku
reflexivita
množina spotřebních možností
lexikografické preference
stínová cena
Marshallova funkce poptávky
nepřímá funkce užitku

Příklady a úlohy

1. ***Globální extrém.*** Předpokládejme, že chování jedince lze popsat funkcí užitku $U = X * Y$. Ve funkci U je celkový užitek, který jedinci plyne ze spotřeby obou komodit, X a Y udávají spotřebovávaná množství obou komodit. Funkce užitku je spojitou funkcí.
Úkol: Určete, zda pro tuto funkci existuje globální extrém, pokud je množina spotřebních možností konvexní množinou.
Výsledek: Ano (mezní užitky jsou kladná čísla, vrstevnice funkce jsou ryze konvexní).

2. ***Vlastnosti omezení.*** Během druhé světové války musel zákazník zaplatit cenu zboží a odevzdat při jeho nákupu určitý počet „bodů“. Předpokládejme, že spotřebitel měl funkci užitku $U = X * Y$, ceny výrobků byly $P_X = 1$ koruna a $P_Y = 2$ koruny, za komoditu X musel zákazník odevzdat 2 body a za komoditu Y platil 1 bod. Spotřebitel vynakládal na nákup statků X a Y celkem 160 korun týdně a měl k dispozici 200 bodů.
Úkol: Určete, zda množina spotřebních možností splňuje podmínky, při nichž by jedinec maximalizoval svůj užitek.
Výsledek: Ano, omezení vyhovuje všem třem požadavkům (omezení je neprázdná, uzavřená a omezená množina).

3. ***Určení optima (maximalizace užitku spotřebitelem).*** Spotřebitel vynakládá na nákup statků X a Y celkem 160 Kč týdně. Funkce jeho užitku je $U = X * Y$, ceny výrobků jsou $P_X = 4$ Kč a $P_Y = 10$ Kč.
Úkol:
a) Vypočtěte, kolik jednotek statku X a kolik jednotek statku Y spotřebitel nakoupí. K výpočtu použijte substituční metodu.
b) Ke stejnému výpočtu využijte Lagrangeovu funkci.
c) Ke stejnému výpočtu použijte mezní míry substituce ve spotřebě a ve směně.
Výsledek: $X = 20$, $Y = 8$

4. ***Odvození Marshallových funkcí poptávky.*** Jedinec maximalizuje svůj užitek ze spotřeby dvou komodit (X a Y). Spotřební chování tohoto jedince charakterizuje

funkce užitku $U = X * Y$. Ve funkci je U celkový užitek, který jedinci plyne ze spotřeby obou komodit, a X a Y udávají spotřebovávaná množství obou komodit. Jeho rozpočtové omezení lze vyjádřit rovnicí $I = P_X X + P_Y Y$, kde I je příjem spotřebitele, P_X a P_Y jsou ceny obou komodit. Jedinec vynakládá na nákup obou zboží celý svůj příjem I.

Úkol: Odvoďte Marshallovy funkce poptávky po obou komoditách.

Výsledek: $X = I / 2 P_X$

$Y = I / 2 P_Y$

5. ***Odvození nepřímé funkce užitku.*** Jedinec maximalizuje svůj užitek ze spotřeby dvou komodity (X a Y). Spotřební chování tohoto jedince charakterizuje funkce užitku $U = X * Y$. Ve funkci U je celkový užitek, který jedinci plyne ze spotřeby obou komodit, a X a Y udávají spotřebovávaná množství obou komodit. Jeho rozpočtové omezení lze vyjádřit rovnicí $I = P_X X + P_Y Y$, kde I je příjem spotřebitele, P_X a P_Y jsou ceny obou komodit. Jedinec vynakládá na nákup obou zboží celý svůj příjem I.

Úkol: Odvoďte nepřímou funkci užitku jedince.

Výsledek: $U = I^2 / 4 P_X P_Y$

Literatura

[1] Hořejší, B. - Soukupová, J. - Macáková, L. - Soukup, J.: Mikroekonomie. 5. vydání, Management Press, Praha 2010. *Problematiky se týká kapitola 2 (Užitek, preference a optimum spotřebitele), která obsahuje mimo jiné výklad určení optima spotřebitele jako rovnosti mezních měr substituce, a kapitola 3 (Poptávka), kde lze nalézt grafické odvození Marshallovy poptávky.*

[2] Gravelle, H. – Rees, R.: Microeconomics. 3. vydání, Prentice Hall, London 2004. *Problematiky se týká kapitola 3 (The Theory of the Consumer), která obsahuje výklad optima spotřebitele, analýzu předpokladů zajišťujících jediné řešení optimalizačního problému, odvození Marshallovy poptávky a otázku lexikografických preferencí a kapitola 4 (Consumer Theory: Duality), kde lze nalézt odvození nepřímé funkce užitku.*

[3] Varian, Hal R.: Mikroekonomie - moderní přístup. Victoria Publishing, Praha 1995. *V kapitole 4 (Užitek) je mimo jiné vyložena zajímavým způsobem konstrukce funkce užitku a otázka monotónní transformace funkce.*

[4] Varian, H.R.: Microeconomic Analysis. 3. vydání, W.W. Norton and Co., New York 1992. *Zde zejména kapitola 7 (Utility Maximization).*

[5] Kaňka, M. – Henzler, J.: Matematika pro ekonomy (2). Ekopress, Praha 1997.

[6] Klůfa, J. – Coufal, J.: Matematika pro ekonomy (1). Ekopress, Praha 1997

[7] Klůfa J.: Matematika pro studenty VŠE. Ekopress, Praha 2011

Kapitola 2 Od minimalizace výdajů k poptávce

2.1 Minimalizace výdajů spotřebitelem a výdajová funkce

Minimalizace výdajů

Dosud jsme popisovali chování spotřebitele modelem, který byl založen na maximalizaci spotřebitelova užitku. Tento přístup lze nahradit jiným pohledem: cílem spotřebitele je nyní minimalizovat své výdaje tak, aby dosáhl určité úrovně celkového užitku ze spotřebovávaných statků. Druhý uvedený přístup je výhodnější, pokud chceme měřit např. změny ve výši životních nákladů nebo reálného příjmu, ke kterým dojde v důsledku změn cen.

I nadále budeme předpokládat, že spotřebitel nakupuje pouze dva statky, které mají kladné ceny. Problém minimalizace výdajů lze formálně zapsat následujícím způsobem:

$min\ E = P_X X + P_Y Y$

při omezeních: $U_0 = f(X,Y)$

$X \geq 0,\ Y \geq\ 0$

kde E jsou výdaje spotřebitele na oba statky a U_0 je určitá úroveň celkového užitku, která plyne ze spotřeby statků X a Y.

Opět budeme hledat pouze vnitřní řešení, tj. budeme předpokládat, že spotřebitel nakupuje oba statky. Stejně jako v případě maximalizace užitku použijeme k určení optima Lagrangeovu funkci, tentokrát však ve tvaru:

$L = Px\ X + Py\ Y - \lambda\ (\ f\,(X,Y) - Uo)$

Podmínky prvního řádu získáme z prvních parciálních derivací Lagrangeovy funkce:

$\delta\ L / \delta\ X = Px - \lambda\ (\ \delta\ f\,(X,Y) / \delta\ X)$
$\delta\ L / \delta\ Y = Py- \lambda\ (\ \delta\ f\,(X,Y) / \delta\ Y)$
$\delta\ L / \delta\ \lambda = f\,(\ X,\ Y) - Uo$

Derivace položíme rovné nule a vypočteme podmínky prvního řádu pro vnitřní řešení. Při výpočtu současně eliminujeme z prvních dvou derivací pomocnou proměnnou:
$[\delta\ f\,(X,Y) / \delta\ X\ )] : [\delta\ f\,(X,Y) / \delta\ Y\ ] = Px : Py$

$U_0\ =\ f\,(X,Y)$

První rovnice nám opět, stejně jako v případě maximalizace užitku, udává podmínku optima spotřebitele, tj. rovnost mezní míry substituce ve spotřebě (levá strana rovnice) a mezní míry substituce ve směně (pravá strana rovnice). Druhá rovnice pouze říká, že spotřebitel dosáhl požadované výše užitku.

Při hledání maxima užitku jsme se posouvali po rozpočtovém omezení a snažili se dosáhnout nejvyšší dosažitelné indiferenční křivky. Při minimalizaci výdajů postupujeme odlišně: pohybujeme se po jedné indiferenční křivce a hledáme nejnižší možné rozpočtové omezení.

Opět ponecháváme stranou, stejně jako v případě maximalizace užitku, podmínky druhého řádu. Stejně tak ponecháváme na čtenáři, aby si již sám odvodil ekonomickou interpretaci multiplikační konstanty.

Hicksovy funkce poptávky

Systém parciálních derivací nám poskytl, obdobně jako v případě maximalizace užitku, řešení pouze jednoho dílčího problému. Určili jsme optimální nákup statků *X* a *Y* jedince, který minimalizuje své výdaje při daných cenách komodit a daném užitku. Nyní nás však bude zajímat, jak se bude přizpůsobovat poptávané množství statků *X* a *Y*, pokud se budou měnit ceny těchto statků.

Řešení optimalizačního problému závisí pouze na cenách, příjmu spotřebitele a jeho funkci užitku. Můžeme tudíž z prvních dvou vypočtených parciálních derivací odvodit poptávkové funkce (při dané funkci užitku):

$X = h^1 (U_0, P_X, P_Y)$

$Y = h^2 (U_0, P_X, P_Y)$

Funkce, kdy nakupované množství statku závisí na cenách komodit (při dané výši užitku), se označují jako Hicksovy funkce poptávky. Odvodili jsme systém, který se skládá ze dvou poptávkových funkcí, protože jsme předpokládali, že spotřebitel nakupuje pouze dvě komodity.[1]

Výdajová funkce

Poslední funkcí, kterou se budeme zabývat v souvislosti s minimalizací výdajů spotřebitelem, je výdajová funkce.

Při minimalizaci výdajů jsme určili objem nakupovaných statků *X* a *Y*, při kterých spotřebitel minimalizoval své výdaje. Nyní nás bude zajímat výše minimálních výdajů, které spotřebitel musí vynaložit, pokud chce dosáhnout určité výše užitku při různých úrovních cen jednotlivých statků.

Odpověď získáme dosazením Hicksových poptávkových funkcí zpět do rozpočtového omezení. Rozpočtové omezení zapíšeme ve tvaru:

$E = P_X X + P_Y Y$

Dosazením Hicksových poptávek do rozpočtového omezení získáme výdajovou funkci:

$E = g (U_0, P_X, P_Y)$

Grafické odvození výdajové funkce uvádí graf 2-1. Bod *A* na levé části grafu odpovídá optimálnímu koši statků *X* a *Y*, které spotřebitel nakupuje.

---

[1] *Grafické odvození Hicksovy poptávky lze nalézt v učebnici [1, s. 88]. Pokud předpoklad konstantního užitku nahradíme předpokladem konstantní kupní síly spotřebitele, získáme Slutského poptávku. Grafické odvození Slutského poptávky čtenáře nalezne také ve výše uvedené publikaci (1, s. 88).*

Rozpočtové omezení odráží ceny obou komodit a příjem spotřebitele. Výši užitku vyjadřuje indiferenční křivka U_0.

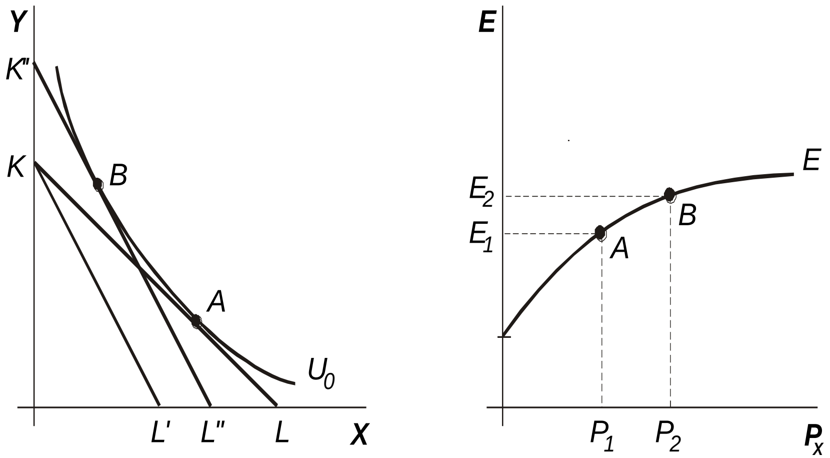
Přeneseme bod *A* na pravou část grafu: zjistíme z rozpočtového omezení na levé části grafu 2-1 výši ceny statku *X* (P_1) a velikost vynaloženého důchodu na oba statky (E_1); vyznačíme obě veličiny do pravé části grafu 2-1 a dostaneme tak i zde bod *A*.

Nyní předpokládejme, že se zvýšila cena statku *X* na P_2 a že se velikost ostatních veličin nemění. Na levé části grafu se tato situace projeví pootočením linie rozpočtu z *KL* na *KL´*.

Spotřebitel však chce dosáhnout stejného užitku; musí proto použít na nákup obou statků větší příjem (E_2) a to se na grafu projeví posunem linie rozpočtu z *KL´* na *K´´L´´*. Optimálnímu koši při konstantním užitku a nové ceně statku *X* odpovídá na levé části grafu bod *B*. Přeneseme i tento bod na pravou část grafu.

Stejným způsobem bychom postupně dostali další body na pravé části grafu 2-1. Nakonec bychom získali požadovanou výdajovou funkci.

Graf 2-1 Odvození výdajové funkce



Vlastnosti výdajové funkce

Výdajová funkce má určité obecné vlastnosti:

a) Výdajová funkce je homogenní prvního stupně v cenách. Toto tvrzení znamená, že zvýšení cen (např. dvakrát) přinutí spotřebitele zvýšit výdaje též dvakrát, pokud chce dosáhnout stejného užitku (tj. z pohledu indiferenční analýzy zůstat na stejné indiferenční křivce).

b) Výdajová funkce je rostoucí s užitkem, neklesající s cenami a rostoucí při růstu nejméně jedné ceny. Tvrzení plyne z axiómu nenasycení. Při daných cenách spotřebitel musí vynaložit větší příjem, pokud chce zvýšit svůj užitek. Obdobně zvýšení cen nutí spotřebitele, aby vydal přinejmenším stejný příjem, aby se jeho celkový užitek nesnížil.

c) Výdajová funkce je konkávní v cenách. Předpokládejme, že se zvyšuje jedna z cen, ostatní ceny a užitek jsou konstantní. Spotřebitel s růstem ceny nezvyšuje své výdaje proporcionálně. Minimalizuje své výdaje a částečně nahrazuje nyní relativně dražší komoditu levnějším statkem (uplatňuje se zde substituční efekt).

d) Parciální derivace výdajové funkce (podle cen) jsou Hicksovy funkce poptávky. Toto tvrzení se označuje jako Shephardova poučka.

Např. derivace výdajové funkce podle ceny statku *X* nám udává Hicksovu poptávku po této komoditě:

$$\delta g\,(Uo, Px, Py) / \delta Px = h^1\,(Uo, Px, Py) = X$$

Sklon výdajové funkce tudíž udává množství nakupovaného statku. Na pravé části grafu 2-1 spotřebitel vydává E_1 korun při ceně statku *X* ve výši P_1. Vypočítejme směrnici výdajové funkce v uvedeném bodě *A*:

$$\delta Ex / \delta Px = \delta\,(Px\,X + Py\,Y) / \delta Px = X$$

2.2 Maximalizace užitku a minimalizace výdajů jako duální problém

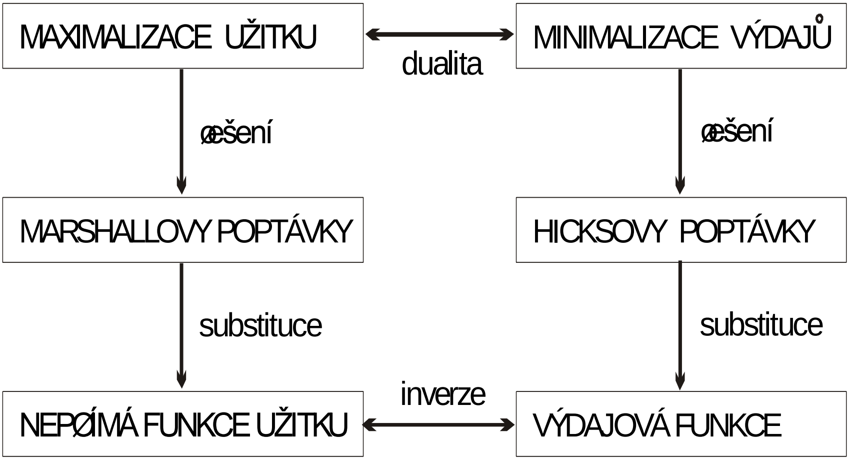
Nejdříve si shrneme pomocí grafu 2-2 náš dosavadní výklad z první kapitoly a z první části druhé kapitoly.

Maximalizace užitku a minimalizace výdajů představují duální problém.

V první kapitole jsme se nejdříve zabývali otázkou maximalizace užitku spotřebitelem při daných cenách a příjmu. Odpověď nám umožnila odvodit soustavu Marshallových funkcí poptávky. Dosazením Marshallových funkcí poptávek zpět do funkce užitku jsme získali nepřímou funkci užitku.

Obdobně jsme postupovali v případě minimalizace výdajů spotřebitelem. Nejdříve jsme určili optimální koš komodit, které spotřebitel nakupuje, pokud chce dosáhnou určité výše užitku při daných cenách komodit. Odpověď na tuto otázku byla základem pro odvození soustavy Hicksových poptávek. Zpětným dosazením Hicksových poptávek do rozpočtového omezení jsme získali výdajovou funkci.

Graf 2-2 Vztah maximalizace užitku a minimalizace výdajů



Není tudíž nijak překvapivé, že podmínka optima (tj. rovnost mezní míry substituce ve spotřebě a mezní míry substituce ve směně) je stejná jak v případě maximalizace užitku, tak v případě minimalizace výdajů.

Propojení je patrné i mezi nepřímou funkcí užitku a výdajovou funkcí. Začněme s nepřímou funkcí užitku. Jak již víme z první kapitoly, v případě dvou statků má tato funkce tvar:

$U = v\ (I, P_X, P_Y)$

Tento vztah musí platit pro různé úrovně příjmu a užitku. Proto můžeme nepřímou funkci užitku převést do tvaru:

$E = g\ (U_0, P_X, P_Y),$

což není nic jiného, než nám již známá výdajová funkce. Obě funkce lze tudíž mezi sebou jednoduše převádět. Obě funkce tak nejsou nic jiného, než různá vyjádření stejné informace.

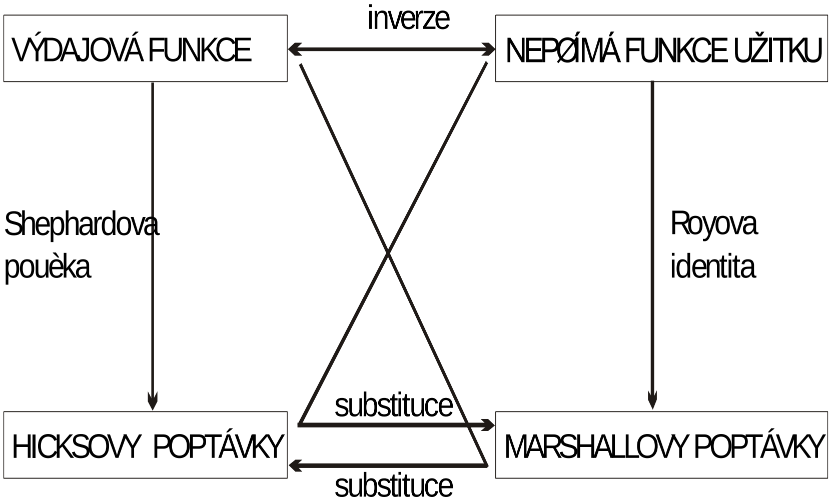
Dosud jsme postupovali od maximalizace užitku (resp. minimalizace výdajů) k nepřímé funkci užitku (resp. k výdajové funkci). Náš postup však můžeme obrátit a z nepřímé funkce užitku (resp. výdajové funkce) se můžeme pokusit odvodit Marshallovy poptávky (resp. Hicksovy poptávky). Obrácený postup naznačuje graf 2-3.

Odvodíme nejdříve z výdajové funkce Marshallovy poptávky. Klíčovým krokem je zde použití Shephardovy poučky, se kterou jsme se seznámili při analýze vlastností výdajové funkce.

Začneme výdajovou funkcí. Derivujeme tuto funkci postupně podle jednotlivých cen a získáme tak Hicksovy poptávky pro jednotlivé komodity. Naším cílem je však získat Marshallovy poptávky. Ty dostaneme, pokud nahradíme v Hicksových poptávkách užitek nepřímou funkcí užitku.

Můžeme však také postupovat opačně a chtít získat z Marshallových poptávek (za pomoci výdajové funkce) Hicksovy poptávky. V tomto případě stačí dosadit do Marshallových poptávek za důchod spotřebitele příslušnou výdajovou funkci.

Graf 2-3 Od výdajové funkce k Marshallově poptávce



Derivací výdajové funkce lze získat Hicksovy poptávky. Obdobně však nelze postupovat od nepřímé funkce užitku směrem k Marshallovým poptávkám. Derivací nepřímé užitku nelze tento typ poptávkových funkcí vypočítat. Postup je poněkud složitější, založený na Royově identitě.

Nejdříve dosadíme do nepřímé funkce užitku $U = v\ (I,P_X,P_Y)$ výdajovou funkci $U = v\ [g\ (U_0,P_X,P_Y),P_X,P_Y]$.

Víme, že výdajová funkce a nepřímá funkce užitku jsou navzájem inverzní funkce. Dosazením tudíž získáváme identitu.

Derivujeme nyní tuto identitu podle ceny (při konstantním užitku); použijeme přitom řetězové pravidlo:

$(\delta v / \delta I) * (\delta g / \delta Px) + (\delta v / \delta Px) = 0$

Z vlastnosti derivace potom plyne Royova identita:

$X = f (I, Px, Py) = - (\delta v / \delta Px) / (\delta v / \delta I)$

Marshallovy poptávky tudíž získáme jako podíl dvou parciálních derivací nepřímé funkce užitku násobený (– 1). V čitateli funkci derivujeme nepřímou funkci užitku podle ceny statku, jehož poptávku chceme získat, a ve jmenovateli podle příjmu spotřebitele.