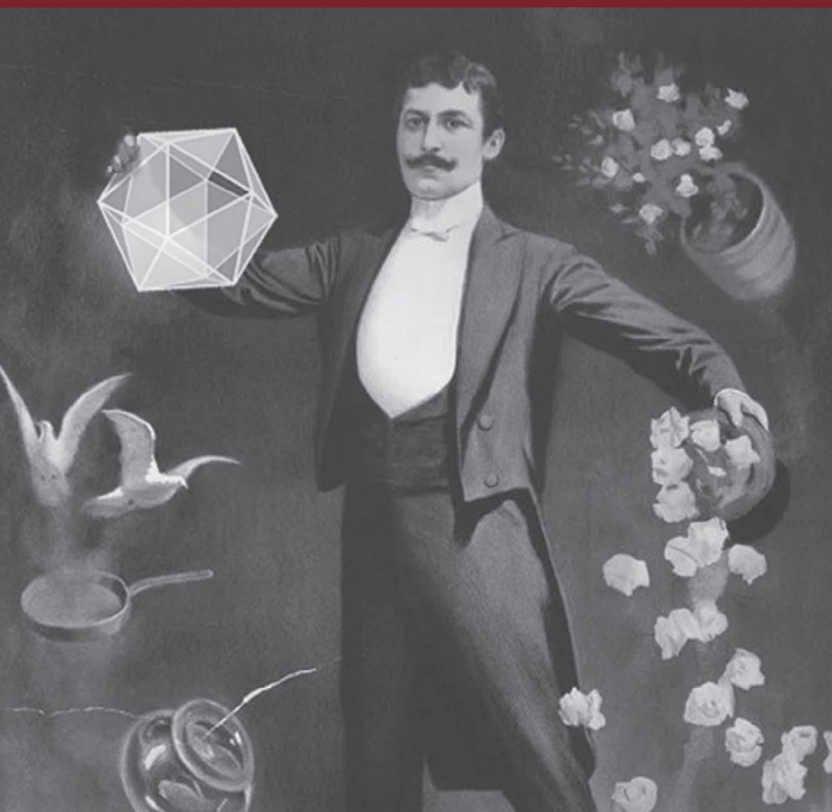


Kniha geometrických kouzel

Matematická expedice

David Acheson



DOKOŘÁN

Kniha geometrických kouzel

Matematická expedice

David Acheson

DOKOŘÁN

David Acheson

Kniha geometrických kouzel

Matematická expedice

The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story was originally published in English in 2020. This translation is published by arrangement with Oxford University Press. Dokořán s. r. o. is solely responsible for this translation from the original work and Oxford University Press shall have no liability for any errors, omissions or inaccuracies or ambiguities in such translation or for any losses caused by reliance thereon.

Kniha geometrických kouzel. Matematická expedice byla původně vydána v angličtině v roce 2020. Tento překlad vychází po dohodě s nakladatelstvím Oxford University Press. Za chyby, vynechávky, nepřesnosti či nejednoznačnosti překladu plně a výhradně odpovídá nakladatelství Dokořán, s. r. o.

© David Acheson 2020

Translation © Jiří Rákosník, 2023

Všechna práva vyhrazena. Žádná část této publikace nesmí být rozmnožována a rozšiřována jakýmkoli způsobem bez předchozího písemného svolení nakladatele.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *The Wonder Book of Geometry: A Mathematical Story* přeložil Jiří Rákosník.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.

Redakce Marie Černá

Sazba Jiří Rákosník. Konverze do elektronické verze
a obálka Michal Puhač.

Vydalo v roce 2025 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5,
dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1 339. publikaci (469. elektronická).

ISBN 978-80-7675-249-8

OBSAH

1	Úvod	7
2	Začínáme	10
3	Eukleidovy Základy	15
	<i>Eukleidovy Základy, 1732</i>	18
4	Thaletova věta	20
	<i>Svět matematiky ve starověkém Řecku</i>	24
5	Geometrie v akci	26
6	Pythagorova věta	32
7	Zamilovaný do geometrie?	42
	<i>371 důkazů Pythagorovy věty</i>	48
8	„Představte si mé nadšení, milý Watsone...“	50
9	Shodnost a podobnost	56
	<i>Zlatý řez</i>	64
10	Obráceně...	66
11	Věty o kružnici	74
12	Ven na tečnu	79
13	Od tečen k nadzvukovému proudění	85
	<i>Galileo a Thaletova věta</i>	90
14	Kolik přesně je π ?	92
15	Příběh elipsy	100
16	Geometrie podle souřadnic	107
	<i>Inspektor Eukleides vyšetřuje</i>	112
17	Geometrie a diferenciální počet	114
18	Královská cesta ke geometrii?	120
19	Nečekaná setkání	128

20	Cevova věta	135
	<i>Další kousky s π</i>	142
21	Jistá symetrie	144
22	„Pirátství“ ve Woolwichi?	151
23	Fermatova úloha	160
24	Mýdlové řešení	170
25	Geometrie v <i>Dámském zápisníku</i>	177
	<i>Eukleidovy Základy, 1847</i>	184
26	Co vlastně Eukleides udělal	186
27	Eukleides o rovnoběžkách	195
	<i>Důkaz obrázkem?</i>	202
28	„Nová teorie rovnoběžek“?	204
29	Anti-Eukleides?	211
30	Když se geometrie zvrtně...	219
31	Nové úhly pohledu na geometrii	229
32	A nakonec...	237
	<i>Poznámky</i>	247
	<i>Doporučená literatura</i>	271
	<i>Poděkování</i>	275
	<i>Zdroj citací</i>	276
	<i>Práva k ilustracím</i>	277
	<i>Rejstřík</i>	279

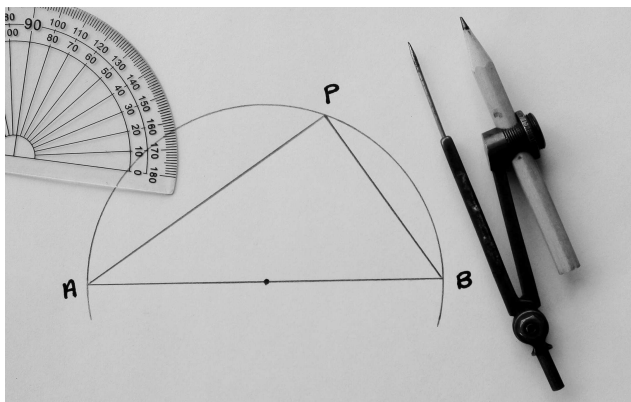


ÚVOD

Všechno to začalo ve škole jednoho chladného zimního rána v roce 1956, když mi bylo deset let.

Pan učitel Harding předváděl nějakou matematiku na tabuli, od křídy se jen prášilo. Náhle se otočil a řekl nám, ať nakreslíme půlkružnici o poloměru AB .

Na půlkružnici jsme pak měli zvolit nějaký bod P , spojit ho úsečkami s body A a B a změřit velikost úhlu při bodu P (obrázek 1).



Obr. 1: Thaletova věta.

Pustil jsem se pěkně do toho a mimoděk jsem předpokládal, že úhel bude záviset na tom, kde přesně na půlkružnici se bod P nachází.

Tak tomu však *není*.

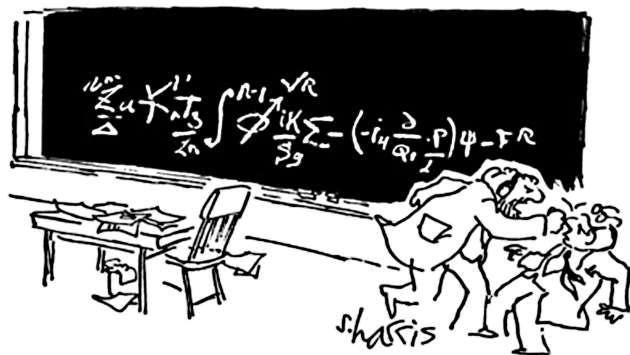
Je vždycky pravý.

* * *

Neměl jsem tehdy tušení, že matematika je plná podobných překvapení. Nevěděl jsem ani, že jde o jednu z prvních velkých vět geometrie, pocházející od starořeckého matematika, který se jmenoval Thales. Od něj údajně pochází výrok, že klíčová otázka nezní „Co víme?“, nýbrž „*Jak to víme?*“.

Proč je tedy ten úhel v půlkružnici vždy pravý?

Krátká odpověď je, že to umíme *dokázat* pomocí řady logických kroků vycházejících z několika zřejmých počátečních předpokladů.



TAK VY CHCETE DŮKAZ ? TADY JE !

Obr. 2: Důležitost důkazu.

A doufám, že se mi právě tímto způsobem podaří na následujících stránkách nejen položit jisté základy geometrie, ale udělat ještě mnohem víc.

Geometrie totiž umožňuje, aby člověk v téměř jakémkoli věku *za pouhou půlhodinu* uviděl leccos z celé podstaty a ducha matematiky v její nejlepší podobě.

A jestli mi nevěříte...

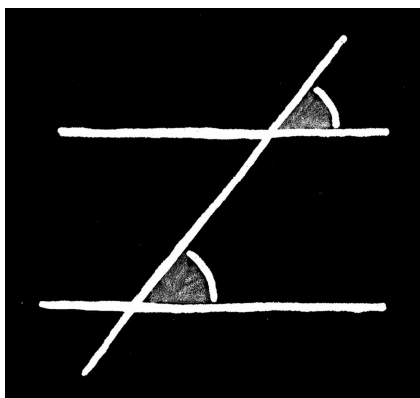


ZAČÍNÁME

První opravdu velká myšlenka se týká *rovnoběžek*.
To jsou přímky v téže rovině, které se nikdy neprotnou, ať je prodloužíme jakkoli daleko.
A o nich teď vyslovíme dva předpoklady.

Rovnoběžky

Můžete si představit dvě přímky, které protíná třetí přímka tak, že s nimi vytvoří takzvané *souhlasné úhly*, jako na obrázku 3.



Obr. 3: Souhlasné úhly.

Téměř v celé knize budeme vycházet z následujících předpokladů:

- (1) Jsou-li dvě přímky rovnoběžné, pak mají souhlasné úhly stejnou velikost.
- (2) Mají-li souhlasné úhly stejnou velikost, pak jsou příslušné dvě přímky rovnoběžné.

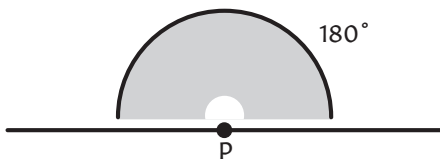
Tyto předpoklady jsou založeny na intuitivní představě, že rovnoběžky musejí mít, abychom tak řekli, „stejný směr“. Jakkoli samozřejmé se však výroky (1) a (2) mohou zdát, *jsou to předpoklady*.

A hned na samém začátku je dobré si uvědomit, že jsou to v podstatě dvě velmi odlišná tvrzení.

Zatímco díky (1) můžeme rovnoběžky používat, (2) nám umožňuje ukázat, že vůbec nějaké máme.

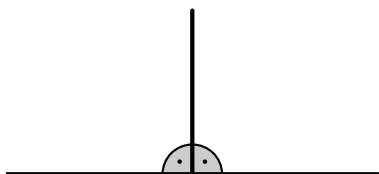
Úhly

Velikost úhlů budeme měřit ve *stupních* označovaných symbolem $^{\circ}$, přičemž dvě části téže přímky procházející nějakým bodem P tvoří úhel velikosti 180° (obrázek 4).



Obr. 4: Přímka a přímý úhel.

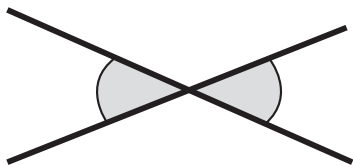
Pravý úhel má poloviční velikost (tedy 90°) a o dvou přímkách, které ho tvoří, říkáme, že jsou navzájem kolmé (obrázek 5).



Obr. 5: Pravé úhly.

Vrcholové úhly

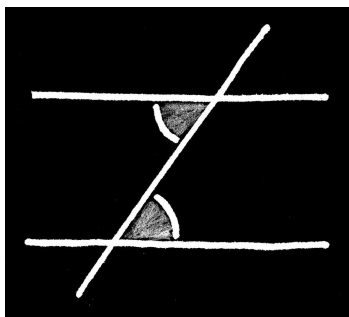
Když se dvě přímky protnou, dva takzvané *vrcholové úhly* mají stejnou velikost (obrázek 6).



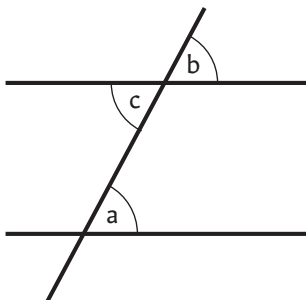
Obr. 6: Vrcholové úhly.

Střídavé úhly

Jsou-li dvě přímky rovnoběžné a třetí přímka je protíná, pak takzvané *střídavé úhly* mají stejnou velikost (obrázek 7).



Obr. 7: Střídavé úhly.



Obr. 8: Důkaz toho, že střídavé úhly mají stejnou velikost.

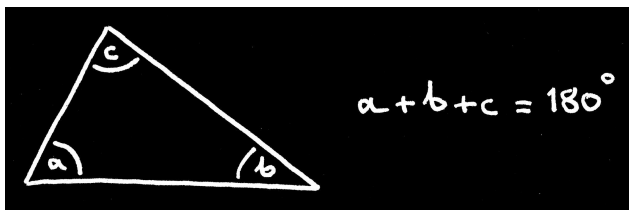
Je to z toho důvodu, že podle obrázku 8 je $a = b$ (souhlasné úhly) *a zároveň* $b = c$ (vrcholové úhly), takže $a = c$.

Odůvodnění funguje také obráceně, takže když mají střídavé úhly stejnou velikost, příslušné dvě přímky musejí být rovnoběžné.

A když teď máme k dispozici tyto úvahy, jsme připraveni dokázat první větu, která podle mého názoru není ani trochu samozřejmá...

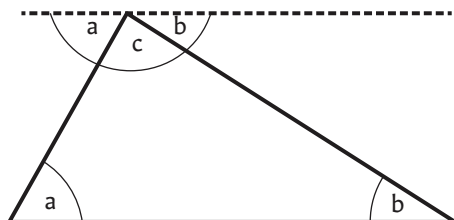
Součet úhlů v trojúhelníku

Tři úhly v libovolném trojúhelníku dávají dohromady 180° (obrázek 9).



Obr. 9: Úhly v trojúhelníku.

Abyste to dokázali, narýsujte přímku procházející jedním z vrcholů a rovnoběžnou s protější stranou trojúhelníka (obrázek 10).



Obr. 10: Důkaz součtu úhlů v trojúhelníku.

Úhly a pak mají stejnou velikost (střídavné úhly).

Ze stejného důvodu mají i oba úhly b stejnou velikost.

A protože úhly a , b , c při nově narýsované přímce dohromady tvoří přímý úhel, platí $a + b + c = 180^\circ$, čímž je důkaz hotov.



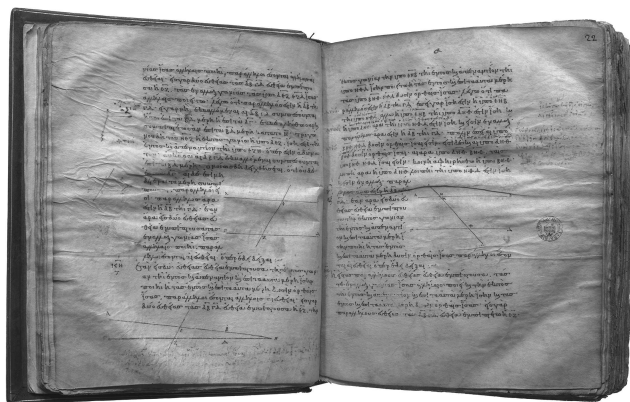
EUKLEIDOVY ZÁKLADY

Nejslavnějším příkladem geometrie podané takovým stručným, deduktivním a pečlivě uspořádaným způsobem jsou *Základy*, které napsal Eukleides z Alexandrie (obrázek 11) kolem roku 300 př. n. l.



Obr. 11: Eukleides.

Asi bude nejlepší, když si hned na začátku ujasníme, že přesné věty a jejich důkazy v Eukleidových *Základech* (obrázek 12) se týkají ve své podstatě imaginárních objektů.



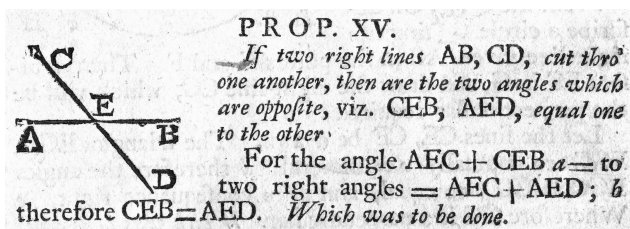
Obr. 12: Nejstarší dochovaná kopie Eukleidových *Základů* (rukopis D'Orville 301, opsaný v roce 888 v Konstantinopoli písařem Štěpánem pro kaisarejského biskupa Arethase z Patry).

Eukleidovská přímka například není jen „dokonale“ přímá, má *nulovou tloušťku*. Takže kdybychom ji dokázali správně narýsovat, nebyla by ani vidět.

A bod není tečka malé velikosti, bod nemá vůbec žádnou velikost. Či, jak to popsal Eukleides,

bod je to, co nemá žádnou část.

Je třeba také říct, že Eukleides nijak nepoužívá nic, co bychom nazvali „jednotkou míry“ pro délku. A ne-najdeme u něj ani žádné stupně. Jednotce velikosti úhlu se u něj nejvíc blíží pojem *pravého úhlu*, kterého ovšem využívá hojně (obrázek 13).



Obr. 13: Důkaz tvrzení, že vrcholové úhly mají stejnou velikost, ve vydání Eukleidových Základů z roku 1732.

Bez ohledu na to všechno a navzdory strohému stylu výkladu předčí *Základy* svým dopadem i počtem vydání téměř kteroukoli jinou knihu v lidské historii.

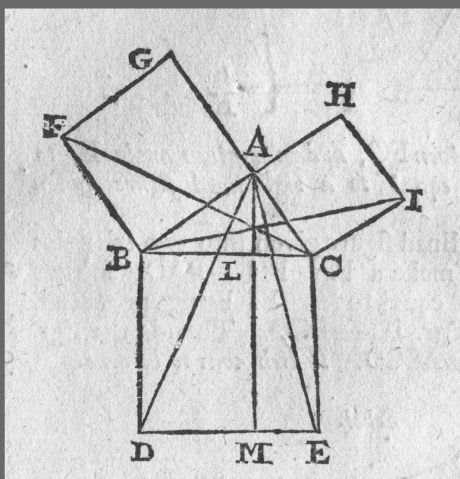
Je však jisté, že nemůže existovat jediný „nejlepší“ způsob, jak dělat geometrii, a všichni si musíme k tomuto předmětu najít svou vlastní cestu.

A pokud v této knize budeme bez ostychu předpokládat víc než Eukleides, je to proto, že chceme rychleji dospět k zajímavým a překvapivým výsledkům...

Eukleidovy *Základy*, 1732



Jedno z nejoblíbenějších raných vydání Eukleidových *Základů* je od Isaaca Barrowa. Poprvé vyšlo v roce 1660, moje kopie je však z roku 1732.



Cough

E U C L I D E's E L E M E N T S;

The whole FIFTEEN BOOKS
compendiously Demonstrated:

W I T H
A R C H I M E D E S's Theorems of
the Sphere and Cylinder Investigated
by the *Method of Indivisibles*.

By ISAAC BARROW, D.D. *late Master
of Trinity College in Cambridge.*

To which is Annex'd,
E U C L I D E's *Data*, and a brief
Treatise of Regular Solids.

The Whole revis'd with great Care,
and some Hundreds of Errors of the
former Impression corrected.

By THOMAS HASELDEN, *Teacher
of the Mathematicks.*

Καθαροὶ ψυχῆς λογικῆς εἰσιν αἱ μαθηματικαὶ ἐπιστήμαι.

LONDON: Printed for Daniel Midwinter and Aaron
Ward in Little-Britain; Arthur Bettefworth and Charles
Hitch in Pater-noster-row; and Thomas Page and William
Mount on Tower-Hill. 1732.



THALETOVA VĚTA

Thaletova věta říká, že úhel v půlkružnici je vždy pravý, má 90° .

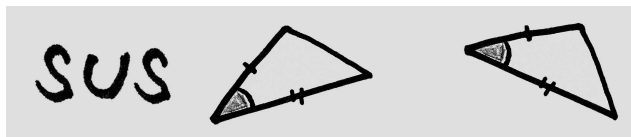
A pro její důkaz budeme potřebovat jen pár dalších klíčových myšlenek.

Shodné trojúhelníky

Shodné trojúhelníky jsou takové, které mají *přesně stejný tvar a velikost*.

Asi nejjednodušším způsobem, jak pevně určit přesnou velikost a tvar trojúhelníka, je stanovit délky dvou stran a velikost úhlu mezi nimi.

To nás přivádí k velmi jednoduchému testu shodnosti, kterému se neformálně říká „strana-úhel-strana“ či sus (obrázek 14).

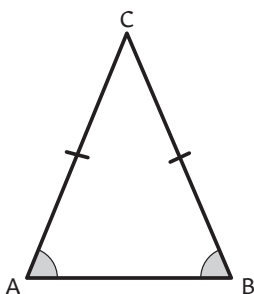


Obr. 14: Shodnost podle sus.

Rovnoramenné trojúhelníky

Rovnoramenný trojúhelník je takový, jehož dvě strany mají stejnou délku.

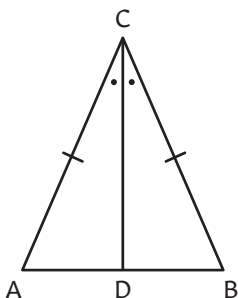
Trojúhelníky tohoto druhu mají v geometrii významnou roli, z velké části proto, že úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné (obrázek 15).



Obr. 15: Rovnoramenný trojúhelník.

Mnozí lidé asi považují tento výsledek za dosti zřejmý. Koneckonců, když se na rovnoramenný trojúhelník „podíváme zezadu“, bude vypadat přesně stejně.

Formálnějším způsobem lze výsledek dokázat tak, že sestrojíme úsečku CD , která půlí úhel při vrcholu C (obrázek 16).



Obr. 16: Důkaz toho, že jsou úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka shodné.

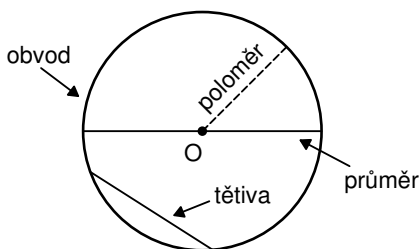
Trojúhelníky ACD a BCD jsou pak shodné podle *SS* a každý je ve skutečnosti „zrcadlovým obrazem“ či „převrácením“ toho druhého. Pak ovšem úhly při vrcholech A a B musejí být shodné.

(Když jsou *všechny tři* strany trojúhelníka stejně dlouhé, říkáme, že trojúhelník je *rovnostranný*. Takový trojúhelník je pak rovnoramenný třemi různými způsoby, a všechny tři jeho úhly jsou tedy shodné.)

Kružnice

Určující vlastností kružnice je to, že všechny její body mají stejnou vzdálenost od jednoho určitého bodu O , který se nazývá jejím *středem*.

Některé další běžné termíny související s kružnicí jsou uvedeny na obrázku 17.



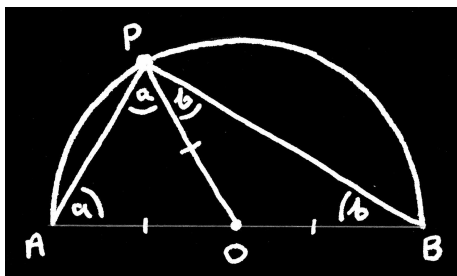
Obr. 17: Kružnice.

A to je vše, co potřebujeme k důkazu Thaletovy věty.

Thaletova věta

Chceme dokázat, že když P je nějaký bod na půlkružnici na obrázku 18, pak $\sphericalangle APB = 90^\circ$, kde $\sphericalangle APB$ označuje úhel mezi PA a PB .

Skutečnost, že bod P leží na půlkružnici, využijeme nepochybně nejjednodušeji tak, že nakreslíme úsečku OP a uvědomíme si, že $OP = OA = OB$, protože všechny body na kružnici jsou stejně daleko od jejího středu.



Obr. 18: Důkaz Thaletovy věty.

Rázem dostáváme dva *rovnoramenné trojúhelníky* PAO a BPO .

Oba „základnové“ úhly a jsou proto shodné a to platí i pro úhly b .

A protože tři úhly ve velkém trojúhelníku ABP musí dát dohromady 180° , platí

$$a + (a + b) + b = 180^\circ,$$

takže $a + b = 90^\circ$. Z toho plyne, že $\sphericalangle APB = 90^\circ$, a tím je věta dokázána.

Pamatuji si to celou tu dobu od okamžiku, kdy jsem tento důkaz onoho chladného rána v roce 1956 uviděl.

I když je na první pohled obtížné tomu výsledku uvěřit, o několik minut později si asi řekneme, „ach, ono je to vlastně docela zřejmé – stačí podívat se na to správným způsobem.“

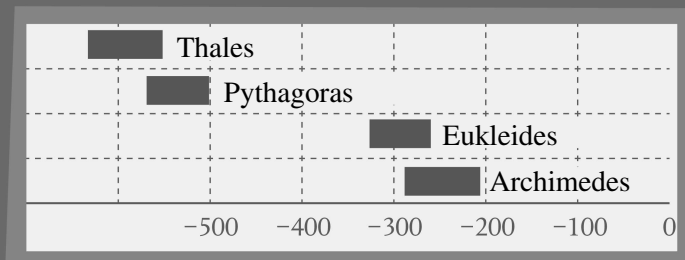
A to je – aspoň podle mých zkušeností – jeden z charakteristických znaků matematiky v celé její kráse.

Svět matematiky ve starověkém Řecku



Thales žil v Milétu.

Pythagoras pocházel z ostrova Samos,
ale později přesídlil do Krotónu.



Platónská Akademie v Athénách měla
nad vstupem proslulý nápis

ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ
ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ

Bez znalosti geometrie sem nikdo nevstupuj!



Maják na ostrově Faros u Alexandrie

Eukleides napsal *Základy* v Alexandrii.

Archimedes žil a pracoval v Syrakusách.

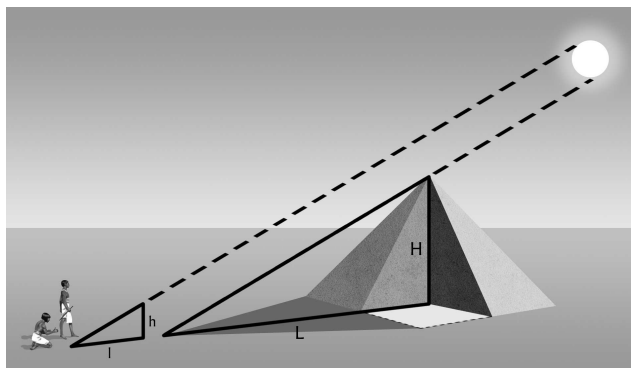


GEOMETRIE V AKCI

V průběhu dějin geometrie vždy nacházela uplatnění v praxi. Jedním z prvních byl Thaletův pokus vypočítat výšku Velké pyramidy v Egyptě.

Thales a podobné trojúhelníky

Thales změřil délku stínu vrženého Velkou pyramidou, přičetl k tomu polovinu její základny a určil vzdálenost L na obrázku 19.



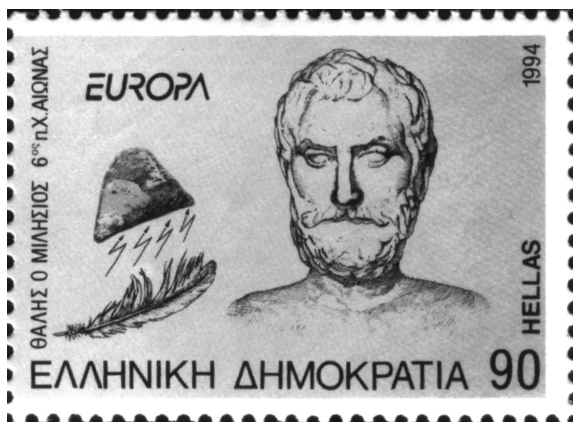
Obr. 19: Podobné trojúhelníky.

Pak změřil délku stínu l svislé tyče o výšce h .

Na základě předpokladu, že sluneční paprsky jsou rovnoběžné, usoudil, že dva trojúhelníky na obrázku 19, ač velmi rozdílné velikosti, mají přesně stejný *tvár*, takže délky odpovídajících stran musejí být ve stejném poměru, konkrétně

$$\frac{h}{H} = \frac{l}{L}.$$

Po změření ostatních tří délek tak mohl určit výšku H Velké pyramidy.



Obr. 20: Thales na řecké poštovní známce z roku 1994.

Trojúhelníky, které mají přesně stejný *tvár*, dnes nazýváme *podobné*. A jak uvidíme později, tyto trojúhelníky hrají významnou roli v některých větách, které v geometrii patří k těm nejpozoruhodnějším.

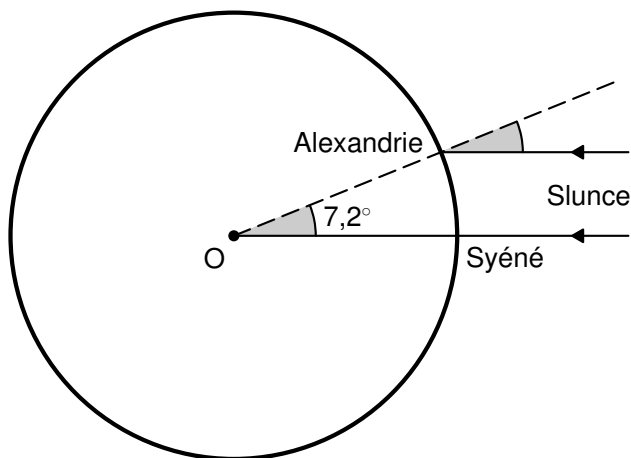
Měření Země

Slovo „geometrie“ je řeckého původu a znamená doslova „měření Země“. Bude tedy vhodné, abychom se nyní podívali na slavný pokus určit obvod zeměkoule, který provedl Eratosthenes z Kyrény někdy kolem roku 240 př. n. l.

Ve skutečnosti k tomu také využil sluneční paprsky, ale jiným způsobem.

Eratosthenes věděl, že v Syéné (dnešním Asuánu) v poledne nejdelšího dne v roce stojí Slunce přímo nad hlavou, protože osvětluje dno hluboké studny.

Věděl také, že v Alexandrii, která je na sever od Syéné ve vzdálenosti 5 000 stadií, sluneční paprsky svírají se svislicí úhel odpovídající $1/50$ plného kruhu.



Obr. 21: Měření Země.

Eratosthenes vycházel z předpokladu, že Slunce je tak daleko od Země, že jeho paprsky dopadající na

Zemi jsou rovnoběžné. Dva šedě označené úhly na obrázku 21 jsou pak souhlasné a úhel v bodě O , ve středu Země, musí být rovněž $1/50$ plného kruhu. Obvod zeměkoule proto musí být padesátinásobkem vzdálenosti mezi Syéné a Alexandrií, tedy 250 000 stadií.

Je to asi hodně velké zjednodušení toho, co Eratosthenes ve skutečnosti dělal. Také již nevíme, co přesně *stadium* jako jednotka vzdálenosti znamenala. Odhady pozdějších učenců se pohybují v rozmezí od 0,15 do 0,2 kilometru, což by délku obvodu zeměkoule kladlo někam mezi 37 500 a 50 000 kilometrů. (Skutečná hodnota je přibližně 40 000 km.)

„Praktické cvičení“, 1929

Praktická geometrie má samozřejmě ještě jeden, zcela odlišný aspekt a tím je konstrukce geometrických obrazců pomocí pravítka, kružítko a dalších potřebných nástrojů.

Při takové činnosti však musíme mít neustále na paměti to, co by fyzici nazvali „experimentální chybou“; jinak by to mohlo dopadnout trochu směšně.

Na policice mám například starý sešit s geometrickými příklady z roku 1929, který patřil nějakému žákovi základní školy na severu Anglie.

Sešit má sám o sobě značné kouzlo, převážně obsahuje zjednodušené eukleidovské konstrukce provedené úhledně a správně. Na poslední stránce však náhle narazíme na něco, co je nazváno „Praktické cvičení“ a zjevně zahrnuje konkrétní *měření* (obrázek 22).

Přestože to učitel odfajfkoval, na této konkrétní práci je něco lehce absurdního.